



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.

PAA

Amindien

ANNALEN
DER
PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE.

BAND IX.

PAA

Amman

ANNALEN
DER
PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE.

BAND IX.

ANNALEN
DER
PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE.

BAND IX.

DER GANZEN FOLGE ZWEIHUNDERT FÜNFUNDVIERZIGSTER.

UNTER MITWIRKUNG

DER PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT IN BERLIN

UND INSBESONDERE DES HERREN

H. HELMHOLTZ

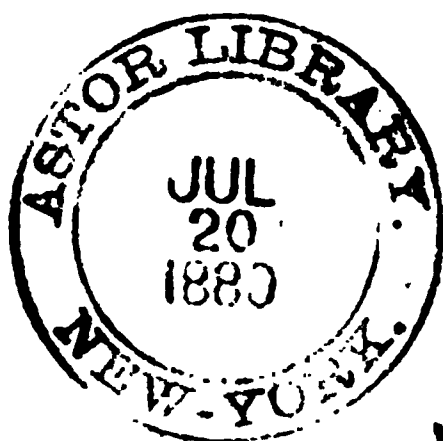
HERAUSGEGEBEN VON

G. WIEDEMANN.

NEBST DREI FIGURENTAFELN.

LEIPZIG, 1880.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIOUS BARTH.



1716

Inhalt.

Neue Folge. Band IX.

Erstes Heft.

	Seite
I. G. Kirchhoff u. G. Hansemann. Ueber die Leitungsfähigkeit des Eisens für die Wärme	1
II. D. J. Korteweg. Ueber die Veränderung der Form und des Volumens dielectrischer Körper unter Einwirkung electricischer Kräfte	48
III. E. Mach u. S. Doubrava. Beobachtungen über die Unterschiede der beiden electricischen Zustände	61
IV. H. Herwig. Bemerkung über die electricische Leitungsfähigkeit des Quecksilberdampfes	77
V. A. v. Waltenhofen. Ueber eine directe Messung der Inductionsarbeit und eine daraus abgeleitete Bestimmung des mechanischen Aequivalentes der Wärme	81
VI. E. Edlund. Ueber die Ursache der electricischen Ströme, die beim Strömen von Flüssigkeiten durch Röhren entstehen	95
VII. E. Lommel. Ueber die Erscheinungen, welche eine senkrecht zur optischen Axe geschnittene Platte von Magnesiumplatinocyanür im polarisirten Lichte zeigt	108
VIII. C. Rammelsberg. Chemische Monographie der Glimmergruppe	113

	Seite
IV. W. Schaper. Untersuchungen über die acquipotentialen Vertheilung der magnetischen Fluida cylindrischer Stahlstäbe	418
V. K. Schering. Allgemeine Theorie der Dämpfung, welche ein Multiplicator auf einen Magnet ausübt (Schluss) . .	452
VI. J. L. Schönn. Ueber ultraviolette Strahlen	483
VII. P. Glan. Ueber ein Spectroteleskop	492
VIII. V. Dvořák. Ueber eine neue einfache Art der Schlierenbeobachtung	502
IX. E. Oehler. Beitrag zur Geschichte der mechanischen Theorie der Wärme	512

Geschlossen am 15. März 1880.

Viertes Heft.

I. E. Dorn. Ueber die Fortführung der Electricität durch strömendes Wasser in Röhren und verwandte Erscheinungen	513
II. J. L. Hoorweg. Thermische Theorie des galvanischen Stroms	552
III. F. Exner. Ueber die Ursache der Electricitätserregung beim Contact heterogener Metalle	591
IV. J. H. Long. Ueber Diffusion von Salzen in wässriger Lösung	613
V. H. A. Lorentz. Ueber die Beziehung zwischen der Fortpflanzung des Lichtes und der Körperdichte	641
VI. O. Lubarsch. Das Stokes'sche Gesetz	665
VII. G. Zehfuss. Ueber Bewegungsnachbilder	672
VIII. O. E. Meyer u. F. Auerbach. Nachtrag zu der Abhandlung über die Ströme der Gramme'schen Maschine	676
IX. O. Grotrian. Berichtigung	680
Berichtigungen	680

Geschlossen am 1. April 1880.

ANNALEN
DER
PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE.

BAND IX.

ANNALEN
DER
PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE.

BAND IX.

DER GANZEN FOLGE ZWEIHUNDERT FÜNFUNDVIERZIGSTER.

UNTER MITWIRKUNG

DER PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT IN BERLIN

UND INSBESONDERE DES HERRN

H. HELMHOLTZ

HERAUSGEGEBEN VON

G. WIEDEMANN.

NEBST DREI FIGURENTAFELN.

LEIPZIG, 1880.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIOUS BARTH.

Es sei ferner bis zum Augenblick $t = 0$ überall $u = 0$, und von diesem Augenblick an $u = 1$ in der Fläche $z = 0$, während die fünf anderen Seitenflächen ihre Wärme gegen eine Umgebung von der Temperatur Null ausstrahlen. Neben der partiellen Differentialgleichung (2) hat dann u die Bedingungen zu erfüllen, dass:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{für } t = 0 & u = 0 \\ \text{für } x = 0 & \frac{\partial u}{\partial x} = hu, \\ \text{„ } y = 0 & \frac{\partial u}{\partial y} = hu, \\ \text{„ } z = 0 & u = 1, \end{array} \quad \begin{array}{ll} & \text{für } x = l \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -hu, \\ & \text{„ } y = l \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -hu, \\ & \text{„ } z = l \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -hu \end{array} \right.$$

ist, wo h eine Constante, nämlich das Verhältniss der äussern zur innern Leitungsfähigkeit bedeutet. Die Aufgabe, diesen Forderungen gemäss u zu bestimmen, lässt nur eine Lösung zu; man kann diese finden, indem man u gleich einer Reihe setzt, die nach aufsteigenden Potenzen von h fortschreitet. Für den vorliegenden Zweck ist es ausreichend, die beiden ersten Glieder dieser Reihe zu ermitteln. Demnach setze man:

$$(4) \quad u = U_0 + h U_1.$$

Die Forderungen, die dann für U_0 sich ergeben, erfüllt man, indem man U_0 als eine Function der beiden Variablen z und t annimmt, die der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial U_0}{\partial t} = a \frac{\partial^2 U_0}{\partial z^2}$$

und den Bedingungen genügt, dass:

$$\begin{array}{ll} \text{für } t = 0, & U_0 = 0 \\ \text{für } z = 0 & U_0 = 1, \quad \text{für } z = l \quad \frac{\partial U_0}{\partial z} = 0 \end{array}$$

ist. Man setze:

$$U(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-x^2} dx.$$

$$\text{für } z = 0 \quad U_1 = 0, \quad z = l \quad \frac{\partial U_1}{\partial z} = -U_0.$$

Um ihnen zu genügen, setze man:

$$U_1 = U_x + U_y + U_z,$$

wo U_x eine Function von x, z, t , U_y eine Function von y, z, t und U_z eine Function von z, t sein soll; jede dieser Functionen soll die für U_1 aufgestellte partielle Differentialgleichung erfüllen und sowohl für $t = 0$ als für $z = 0$ verschwinden. Ueberdies muss dann sein:

$$\text{für } x = 0 \quad \frac{\partial U_x}{\partial x} = U_0, \quad \text{für } x = l \quad \frac{\partial U_x}{\partial x} = -U_0,$$

$$z = l \quad \frac{\partial U_x}{\partial z} = 0,$$

$$\text{für } y = 0 \quad \frac{\partial U_y}{\partial y} = U_0, \quad \text{für } y = l \quad \frac{\partial U_y}{\partial y} = -U_0,$$

$$z = l \quad \frac{\partial U_y}{\partial z} = 0,$$

$$\text{für } z = l \quad \frac{\partial U_z}{\partial z} = -U_0.$$

Um U_x zu finden, muss man zunächst eine Function von x, z, t , die V genannt werden möge, ermitteln, für welche:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right),$$

$$\text{für } t = 0 \quad V = 0,$$

$$\text{für } x = 0 \quad \frac{\partial V}{\partial x} = f(z, t), \quad \text{für } x = \infty \quad V = 0,$$

$$,, \quad z = 0 \quad V = 0, \quad ,, \quad z = \infty \quad V = 0$$

ist, wo $f(z, t)$ eine gegebene Function von z und t bedeutet, die für $z = \infty$ verschwindet. Die folgende Erwägung lehrt dieses V kennen. Es ist:

$$\frac{1}{t} e^{-\frac{x^2+z^2}{4at}}$$

eine Lösung der in Rede stehenden partiellen Differentialgleichung; eine allgemeinere erhält man, wenn man hier $t-t'$ für t , $z-z'$ oder $z+z'$ für z setzt, den Ausdruck, der dadurch entsteht, mit einer willkürlichen Function von z' und t' mal $dz' dt'$ multiplicirt und zwischen constanten

Nun setze man:

$$f(z, t) = U\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right),$$

führe statt des Zeichens V das Zeichen $V(x)$ ein, sodass:

$$(6) \quad V(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^t \int_0^\infty dt' dz' U\left(\frac{z'}{2\sqrt{at'}}\right) \frac{1}{t-t'} \left(e^{-\frac{x^2+(x-z')^2}{4a(t-t')}} - e^{-\frac{x^2+(x+z')^2}{4a(t-t')}} \right),$$

und mache:

$$(7) \quad W = W(z) = V(x) + V(l-x) + V(2l-x) + V(3l-x) + . \\ + V(l+x) + V(2l+x) + V(3l+x) + .$$

Dieses W genügt dann der Differentialgleichung, der U_x genügen soll, und es ist:

$$\text{für } t = 0 \quad W = 0$$

$$\text{für } x = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial x} = U\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right), \quad \text{für } x = l \quad \frac{\partial W}{\partial x} = -U\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right),$$

$$,, \quad z = 0 \quad W = 0 \quad , \quad ,, \quad z = \infty \quad W = 0.$$

Bei Rücksicht auf die Gleichung (5) folgt hieraus, dass alle Forderungen, die U_x erfüllen soll, erfüllt werden durch:

$$U_x = W(z) + W(2l-z) - W(4l-z) + . \\ - W(2l+z) + W(4l+z) - .$$

Aus U_x erhält man U_y , indem man y an die Stelle von x setzt.

Um U_z zu erhalten, muss man zunächst eine Function von z und t , die Z oder auch $Z(z)$ genannt werden möge, aufsuchen, die die Bedingungen erfüllt:

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = a \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}, \quad \text{für } t = 0 \quad Z = 0,$$

$$\text{für } z = 0 \quad \frac{\partial Z}{\partial z} = f(t), \quad \text{für } z = \infty \quad Z = 0,$$

wo $f(t)$ eine gegebene Function von t bedeutet. Es geschieht das, wenn:

$$Z = -\sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_0^t dt' f(t') \frac{1}{\sqrt{t-t'}} e^{-\frac{z^2}{4a(t-t')}}$$

alle in Betracht kommenden Werthe von t zu berechnen, wäre lästig; man kann die Mühe verringern, indem man benutzt, dass μ und $\psi(t)$ nur klein sind. Infolge dieses Umstandes kann man in dem Gliede $p \mu E_0^2(t)$ der Gleichung (12):

$$E_0(t) = \frac{C}{p} U\left(\frac{z_0}{2\sqrt{at}}\right)$$

setzen und erhält dann aus ihr:

$$\psi(t) = p E_0(t) - C U\left(\frac{z_0}{2\sqrt{at}}\right) - \mu \frac{C^2}{p} U^2\left(\frac{z_0}{2\sqrt{at}}\right).$$

Diesen Werth setze man in die Gleichung (13) und schreibe C an Stelle von $\frac{C}{p}$, indem man diesem Buchstaben eine neue Bedeutung gibt; man findet dann:

$$E - \mu E^2 = C \left(U\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right) + R + h U_1 \right) + \int_0^t \left(E_0(t') - C U\left(\frac{z_0}{2\sqrt{at'}}\right) - \mu C^2 U^2\left(\frac{z_0}{2\sqrt{at'}}\right) \right) dt' \frac{\partial U \frac{z - z_0}{2\sqrt{a(t-t')}}}{\partial t}.$$

Auch das neue C kann innerhalb gewisser Grenzen willkürlich gewählt werden; es muss nur so gewählt werden, dass:

$$E_0(t) - C U\left(\frac{z_0}{2\sqrt{at}}\right)$$

klein ist.

Die gefundene Gleichung wird zur numerischen Rechnung bequemer, wenn man an Stelle von t' eine neue Integrationsvariable, die U genannt werden möge, durch die Gleichung:

$$U = U\left(\frac{z - z_0}{2\sqrt{a(t-t')}}\right)$$

einführt; sie wird dann:

$$i) \left\{ \begin{aligned} E - \mu E^2 &= C \left(U\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right) + R + h U_1 \right) \\ + \int_0^{U\left(\frac{z-z_0}{2\sqrt{at}}\right)} \left(E_0(t') - C U\left(\frac{z_0}{2\sqrt{at'}}\right) \right) dU - \mu C^2 \int_0^{U\left(\frac{z-z_0}{2\sqrt{at}}\right)} U^2\left(\frac{z_0}{2\sqrt{at'}}\right) dU. \end{aligned} \right.$$

6. Greenwood furnace, Orange County, N. York.
Ein grüner Glimmer, früher von Hauer, zuletzt von
Ham m analysirt¹⁾, wonach:

	Gefunden.	Angenommen.
Fl : Al =	1 : 12,3	1 : 12
Fe : Mg =	1 : 6,4	1 : 6
Na : K =	1 : 3,8	1 : 4
H : R =	—	1 : 3

	Berechnet.	Gefunden.		Berechnet.	Gefunden.
SiO ₂	40,30	40,81	MgO	23,03	21,08
AlO ₃	15,90	16,47	K ₂ O	9,47	9,01
FeO ₃	2,07	2,16	Na ₂ O	1,56	1,55
FeO	6,91	5,92	H ₂ O	0,76	2,19
				100	99,19

	R	: R ^{II}	: R ^{VI}	: Si
Gefunden ohne H =	1,4	: 3,5	: 1	: 3,93
mit H =	2,8	—	—	—
	= 2,8	: 3,6	: 1,02	: 4
Angenommen	2	: 4	: 1	: 4

Vielleicht hat ein kleiner Verlust an Magnesia stattgefunden.

7. Arendal. Grosse, schwarze Tafeln mit grüner Farbe, durchsichtig.

Dieser Glimmer verliert beim Glühen nur 0,3 Proc. und wird bräunlich; die Eisenprobe erwies, dass 0,64 Proc. Sauerstoff aufgenommen waren, sodass der Glühverlust 0,94 Proc. beträgt.

	Gefunden.	Angenommen.
Fe : Al =	1 : 5	1 : 5
(Mn)Fe : Mg =	1 : 4,1	1 : 4
Na : K =	1 : 28	—
H : R =		1 : 2
Fl : R =	1 : 2,2	1 : 2

1) a. a. O.

Fig. 6.

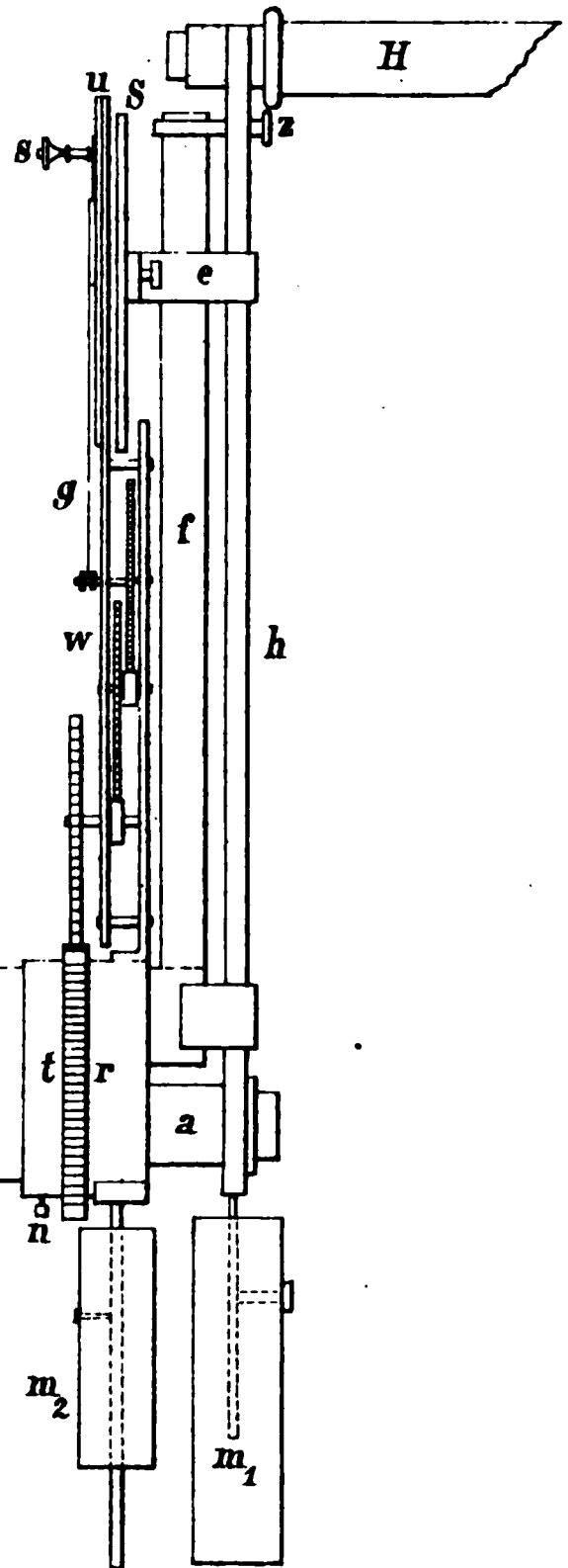


Fig. 7.

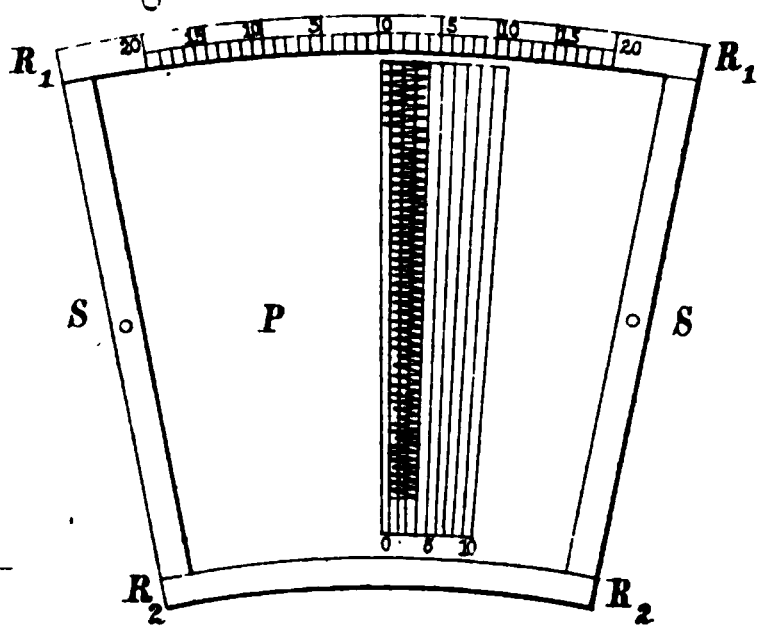
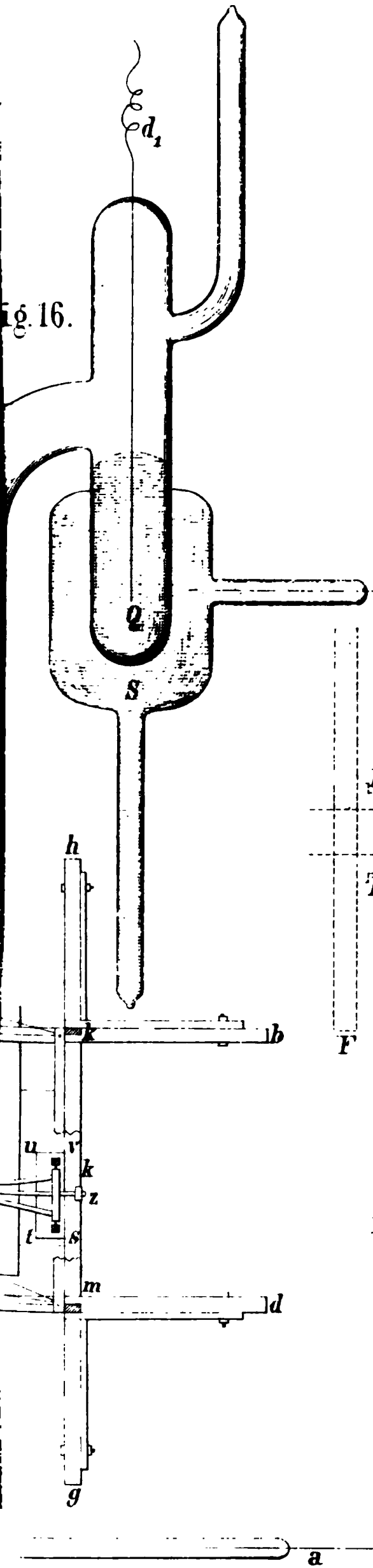


Fig. 16.



ebenfalls bewegte Quantum $+ h ds$ wirkt, nach Clausius, Riemann und Weber:

$$X^C ds ds' = - h h' ds ds' \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} \left[1 - k \sum \left(\frac{\partial x}{\partial t} + u \frac{\partial x}{\partial s} \right) \left(\frac{\partial x'}{\partial t} + u' \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) \right] \\ - k h ds ds' \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{h'}{r} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{h' u'}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) + u \frac{\partial}{\partial s} \left(h' \frac{\partial x'}{\partial t} + h' u' \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{h' u'}{r} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{h' u'^2}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) \right].$$

$$X^B ds ds' = - h h' ds ds' \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} \left[1 - k \sum \left(\frac{\partial x}{\partial t} + u \frac{\partial x}{\partial s} \right) \left(\frac{\partial x'}{\partial t} + u' \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) \right. \\ \left. + \frac{k}{2} \left(\sum \left(\frac{\partial x}{\partial t} + u \frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 + \sum \left(\frac{\partial x'}{\partial t} + u' \frac{\partial x'}{\partial s'} \right)^2 \right) \right]$$

$$- k h ds ds' \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{h'}{r} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{h' u'}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) + u \frac{\partial}{\partial s} \left(h' \frac{\partial x'}{\partial t} + h' u' \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{h' u'}{r} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{h' u'^2}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) \right]$$

$$+ k h' ds ds' \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{h}{r} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{h u}{r} \frac{\partial x}{\partial s} \right) + u' \frac{\partial}{\partial s'} \left(h \frac{\partial x}{\partial t} + h u \frac{\partial x}{\partial s} \right) \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{h u}{r} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{h u^2}{r} \frac{\partial x}{\partial s} \right) \right].$$

$$X^W ds ds' = - h h' ds ds' \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} \left[1 - k \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 + u \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial t} + u' \frac{\partial r}{\partial s'} \frac{\partial r}{\partial t} \right. \right. \\ \left. \left. + u u' \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'} + \frac{u^2}{2} \left(\frac{\partial r}{\partial s} \right)^2 + \frac{u'^2}{2} \left(\frac{\partial r}{\partial s'} \right)^2 \right) \right]$$

$$- k h h' ds ds' r \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} + 2u \frac{\partial^2 r}{\partial t \partial s} + 2u' \frac{\partial^2 r}{\partial t \partial s'} + 2u u' \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'} + u^2 \frac{\partial^2 r}{\partial s^2} + u'^2 \frac{\partial^2 r}{\partial s'^2} \right]$$

$$- k h h' ds ds' r \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} \left[\left(\frac{1}{2} \frac{\partial (u^2)}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial t} \right) \frac{\partial r}{\partial s} + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial (u'^2)}{\partial s'} + \frac{\partial u'}{\partial t} \right) \frac{\partial r}{\partial s'} \right].$$

Setzen wir in diesen Ausdrücken statt h' und u' die Werthe $-h'$ und $-u'_1$, summiren dann die zueinander

dem Glühen aber nur noch 6,98 sich fanden, sind 1,85 Proc. Sauerstoff jenen 0,57 hinzuzurechnen, sodass 2,42 Proc. Wasser vorhanden wären.

		Gefunden.	Angenommen.
Fl	: R	= 1 : 1,8	1 : 2
Ti	: Si	= 1 : 11	1 : 11
Fe	: Al	= 1 : 3	1 : 3
Fe (Mn)	: Mg	= 2,6 : 1	2,6 : 1
Na	: K	= 1 : 7,3	1 : 7
H	: R	=	2 : 3

		Berechnet.	Gefunden.	
Fl	1,61	1,61	
TiO ₂	3,97	4,03	
SiO ₂	32,70	32,49	
AlO ₃	13,07	12,34	
FeO ₃	6,79	6,56	
FeO	26,50	23,60	} 25,14 Fe O
MnO		1,53	
MgO	5,66	5,29	
K ₂ O	8,39	9,59	
Na ₂ O	0,79	0,88	
H ₂ O	1,22	2,42	
		100,70	aq. 1,31	
			101,65	

Hiernach kommen 50 Mol. Oxysilicat auf 1 Mol. Fluosilicat.

Dieser Glimmer ist frei von sichtlichen Begleitern, sodass die Titansäure nicht als solche oder als Titaneisen beigemischt sein kann, sondern als ein Vertreter von Kieselsäure zu betrachten ist.



Gefunden 3,1 : 3 : 1 : 3,7

Angenommen 2 : 3 : 1 : 3,5

Dass die Menge des Wassers grösser gefunden ist als sie der Rechnung nach sein sollte, beruht auf früher schon dargelegten Gründen.

Schon früher hat Fr. v. Kobell einen schwarzen Glimmer von Miask untersucht, welcher ärmer an Eisen,

führen. Wenn ich auch nicht glaube, dass dieser complicirtere Ausdruck die wahre Mischung beider Glimmer wiedergibt, so habe ich doch die Berechnung auch nach ihm (B) beigefügt.

Varietät a. Gefunden. . Angenommen.

Ti : Si = 1 : 16,4 1 : 16

Fe : Al = 1 : 2,1 1 : 2

Fe : Mg = 1 : 1,87 1 : 2

Na : K = 5,3 : 1 5 : 1

H : R = 3 : 1

Berechnet.

		B.
TiO ₂	3,20	3,45
SiO ₂	38,30	38,83
AlO ₃	15,78	17,70
FeO ₃	12,31	13,80
FeO	11,09	9,32

Berechnet.

		B.
MgO	12,31	10,35
K ₂ O	0,90	0,84
Na ₂ O	2,99	2,80
H ₂ O	3,12	2,91
	100	100

Varietät b. Gefunden. Angenommen.

Ti : Si = 1 : 15,4 1 : 15

Fe : Al = 1 : 1,4 1 : 1,5

Fe : Mg = 1 : 2,9 1 : 3

H : R = — 3 : 1 (2 : 1)

Berechnet.

		B.
TiO ₂	3,15	3,30
SiO ₂	37,88	37,33
AlO ₃	14,04	15,64
FeO ₃	14,60	16,27

Berechnet.

		B.
FeO	8,21	6,86
MgO	13,68	11,43
K ₂ O	5,36	6,43
H ₂ O	3,08	2,54
	100	100

H : R = 3 : 1 2 : 1

Varietät c. Gefunden. Angenommen.

Ti : Si = 1 : 20,7 1 : 21

Fe : Al = 1 : 4,4 1 : 4,5

Fe : Mg = 1 : 1,1 1 : 1

Na : K = 1 : 1,16 1 : 1

H : R = 1 : 1

Hiernach wäre es schon ohne H basischer als ein Singulosilicat (etwa $2\overset{\text{I}}{\text{R}}_4\text{SiO}_4 + \overset{\text{I}}{\text{R}}_6\text{SiO}_5$).

3. Lierwiese. Ein Glimmer aus dem vulkanischen Tuff der Eifel, von v. d. Mark untersucht, die Eisenoxydulbestimmung von A. Mitscherlich.

	Gefunden.	Angenommen.
Fe : Al	= 1 : 2	1 : 2
Fe : Mg	= 1 : 6,1	1 : 6
Na : K	= 1 : 1,8	1 : 2
H : $\overset{\text{I}}{\text{R}}$	=	1 : 1

	Berechnet.	Gefunden.		Berechnet.	Gefunden.
Fl	—	0,44	MgO	15,53	15,41
SiO ₂	40,77	41,83	K ₂ O	7,10	6,32
AlO ₃	15,49	15,30	Na ₂ O	2,34	2,27
FeO ₃	12,08	12,04	H ₂ O	2,04	1,22
FeO	4,66	4,53		<hr/> 100	<hr/> 99,46

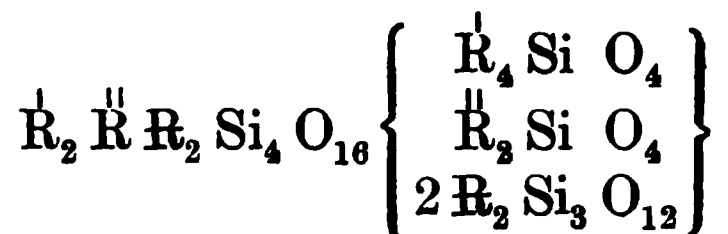
	(H, $\overset{\text{I}}{\text{R}}$) :	$\overset{\text{II}}{\text{R}}$:	$\overset{\text{III}}{\text{R}}$:	Si
Gefunden	1,5	:	2	:	1	: 3,1
Angenommen	2	:	2	:	1	: 3

4. Hitterö. Ein grossblättriger schwarzer Glimmer, an den Rändern der Tafeln mit Orthoklas und Quarz verwachsen. Dünne Blättchen sind mit grünbrauner Farbe durchscheinend.

Verlust beim Trocknen 0,12, beim Glühen noch 1,84 Proc. Der geglühte enthielt 3,86 Proc., der ursprüngliche 13,67 FeO, mithin musste der Glühverlust $1,84 + 1,09 = 2,93$ Proc. sein.

	Gefunden.	Angenommen.
Fe : Al	= 1 : 2,5	1 : 2,5
Fe : Mg	= 1 : 1,47	1 : 1,5
Na : K	= 1 : 45	
Fl : $\overset{\text{I}}{\text{R}}$	= 1 : 3	1 : 3
H : $\overset{\text{I}}{\text{R}}$	=	1 : 1

Formel:

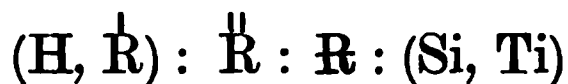


Der ungewöhnlich hohe Wassergehalt würde, wenn er richtig wäre, diesen Glimmer als eine Verbindung $\overset{1}{R}_4 Si O_4 + \overset{1}{R}_6 Si O_5$ erscheinen lassen.

4. Brevig, Norwegen. Dies ist der von Scheerer untersuchte schwarze Glimmer, welcher den Astrophyllit begleitet und reich an Titansäure ist.

	Gefunden.	Angenommen.
Ti : Si = 1 : 10		1 : 10
Fe : Al = 1 : 1,28		1 : 1,25
Fe : Mg = 3,5 : 1		3,5 : 1
Na : K = 1 : 9,8		1 : 10
H : R =		3 : 2

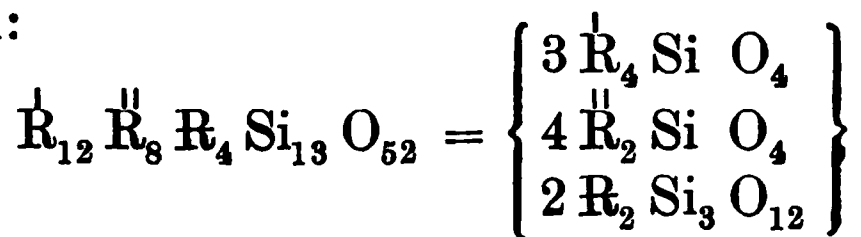
	Berechnet.	Gefunden.	
TiO ₂	4,53	4,68	
SiO ₂	33,42	35,26	
AlO ₃	10,65	10,24	
FeO ₃	13,59	12,47	
FeO	21,06	18,84	} = 21,00 FeO
MnO	—	2,14	
MgO	3,39	3,24	} = 3,28 MgO
CaO	—	0,05	
K ₂ O	9,66	9,20	
Na ₂ O	0,64	0,60	
H ₂ O	3,06	2,71	
	100	99,43	



Gefunden 3 : 2,1 : 1 : 3,63

Angenommen 3 : 2 : 1 : 3,25

Formel:



$$0 = - 0,000\,0208 + 0,000\,000\,0016\,N^{*''}$$

$$0 = + 18907 + 101\,991\,000\,M_3^{*''} - 1,0202\,\dot{N}^{*''}$$

$$0 = - 12,3308 + 0,9657\,M_1^{*''} + 39107,9\,M_3^{*''} \\ + 0,000\,087\,N^{*''}$$

daraus:

$$N^{*''} = + 13000^{\circ}$$

$$M_3^{*''} = - 0,000\,055\,344$$

$$M_1^{*''} = + 13,827,$$

also:

$$N'' = + 34427$$

$$M_3'' = - 0,000\,146\,57$$

$$M_1'' = + 36,618.$$

Aus den mitgetheilten Summen der Fehlerquadrate geht hervor, dass in der That die berechneten Constanten vollkommen die aus den Beobachtungen entnommenen Grössen J_z^* erklären.

In den folgenden Tabellen gibt die erste Spalte die Punkte der Z-Axe an, über denen die in der zweiten Spalte aufgenommenen Beobachtungen gemacht sind. In der Regel sind drei Beobachtungsreihen für jeden Punkt angestellt, die mitgetheilten Zahlen sind die constanten doppelten Endelongationen in Scalentheilen. In der dritten Spalte finden sich die doppelten Endelongationen, wie sie sich aus den auf Grund der Beobachtungen berechneten Constanten ergeben, welche über den Tabellen stehen; in der vierten Spalte die zur zweiten und dritten gehörenden Differenzen; in der fünften die aus den Beobachtungen mit der andern Inductionsrolle berechneten doppelten Endelongationen, die hier auf diejenige Einheit zuvor reducirt sind, in der die in der zweiten Spalte gemachten Beobachtungen angegeben sind; die Differenzen mit den in der zweiten Spalte stehenden Beobachtungen füllen die sechste Spalte.

Weitere Induktionsrolle.

$$M_1'' = +36,618 \quad M_3'' = -0,0002887 \quad N'' = +29116 \quad 2\lambda'' = 206,68$$

$$M_1'' = +17,423 \quad M_3'' = -0,0000697 \quad N'' = +16381 \quad 2\lambda'' = 239,48$$

Nord- ende	Galvanometer- ausschläge Rolle II beobacht. berechn.	Differenz	Rolle I berechn.	Differenz	Süd- ende	Galvanometer- ausschläge Rolle II beobacht. berechn.	Differenz	Rolle I berechn.	Differenz
200,01	0,67 0,44 0,50	-0,11 -0,34 -0,28	0,66	+0,01 -0,22 -0,16	-200,01	- 0,65 - 0,50 - 0,43	+0,13 +0,28 +0,35	- 0,66	+0,01 +0,16 +0,23
150,29	13,60 13,97 13,80	-0,98 -0,61 -0,78	13,99	-0,39 -0,02 -0,19	-150,29	-14,36 -14,58 -14,11	+0,22 ±0,00 +0,47	-14,00	-0,36 -0,58 -0,11
137,86	17,00 17,66 17,88	+0,20 +0,86 +1,08	15,28	+1,72 +2,38 +2,60	-137,86	-17,70 -18,00 -	-0,90 -1,20 -	-15,28	-2,42 -2,72 -
125,43	16,60 16,70 16,71	+0,09 +0,19 +0,20	14,91	+1,69 +1,79 +1,80	-125,43	-16,45 -16,54 -16,55	+0,06 -0,03 -0,04	-14,91	-1,54 -1,63 -1,64
100,57	13,66 13,05 13,23	-0,68 -1,29 -1,11	12,38	+1,28 +0,67 +0,85	-100,57	-13,10 -14,46 -12,95	+1,24 -0,12 +1,39	-12,38	-0,72 -2,08 -0,57
75,71	10,28 9,90 10,21	+0,31 -0,07 +0,24	8,30	+1,98 +1,60 +1,91	- 75,71	- 9,90 -10,50 -10,51	+0,07 -0,53 -0,54	- 8,30	-1,60 -2,20 -2,21
50,83	6,30 6,30 6,70	-0,30 -0,30 +0,10	5,52	+0,78 +0,78 +1,18	- 50,83	- 6,89 - 6,87 -	-0,29 -0,27 -	- 5,52	-1,37 -1,35 -
25,97	3,06 3,40	-0,35 -0,01	2,71	+0,35 +0,69	- 25,97	- 3,40 - 3,00	+0,01 +0,41	- 2,71	-0,69 -0,29

Zweite Reihe.

Magn. Moment = 204 931 00. Härte wie vorhin, Magnetismus noch weit unter dem Sättigungspunkte.

Engere Inductionsrolle.

$$\begin{array}{llll} M_1' = 9,4483 & M_2' = -0,000\,058\,0 & N' = 5394,4 & 2\lambda' = 202,73 \\ \mu R_1' = 9,1233 & \mu R_2' = -0,000\,056\,0 & \mu' = 5221,2 & 2\lambda' = 234,94 \end{array}$$

Weitere Induktionsrolle.

$$M_1'' = +12,0016 \quad M_2'' = +0,000\,0365 \quad N'' = +2058,2 \quad 2\lambda' = 216,04$$

$$2K_1'' = +7,1363 \quad 2K_2'' = +0,000\,0217 \quad 2\lambda'' = +1223,9 \quad 2A'' = 247,72$$

Nord- ende	Galvanometer- auschläge Rolle II beobacht.	Differenz	Rolle I berechn.	Differenz	Süd- ende	Galvanometer- auschläge Rolle II	Differenz	Rolle I berechn.	Differenz
150,29	6,36 6,61 6,05	+0,05 +0,30 -0,26	8,44	-2,08 -1,83 -1,39	-150,29	-6,20 -6,30 -6,30	+0,11 -0,01 -0,01	-8,44	+2,24 +2,14 +2,14
125,43	7,05 7,57 7,52	-0,25 +0,27 +0,22	8,63	-1,58 -1,06 -1,11	-125,43	-7,86 -7,45 -7,31	-0,56 -0,15 -0,01	-8,63	+0,77 +1,18 +1,82
100,57	6,12 6,10 6,03	-0,52 -0,54 -0,61	7,41	-1,29 -1,31 -1,38	-100,57	-6,03 -6,30 -5,85	+0,61 +0,84 +0,79	-7,41	+1,38 +1,11 +1,56
75,71	5,01 5,10 5,31	+0,23 +0,32 +0,53	4,50	+0,51 +0,51 +0,81	-75,71	-4,93 -5,34 -5,07	-0,15 -0,56 -0,29	-4,45	-0,48 -0,89 -0,62
50,83	3,47 3,20 3,21 4,04	+0,19 -0,08 -0,07 +0,76	3,29	+0,18 -0,09 -0,08 -0,75	-50,83	-3,36 -3,35 -3,44 -	-0,08 -0,07 -0,16 -	-3,29	-0,07 -0,06 -0,15 -
25,97	1,70 1,75	-0,02 +0,03	1,69	+0,01 +0,06	-25,97	-1,90 -1,77	-0,18 -0,05	-1,69	-0,21 -0,03

Dritte Reihe.

Magn. Moment = 501 356 00. Stahlstab glashart, bis zur Sättigung magnetisirt.

Engere Inductionsrolle.

$M_1' = + 21,886$ $M_3' = - 0,000 2032$ $N' = 11208$ $2\lambda' = 204,91$
 $M_1' = + 23,513$ $M_3' = - 0,000 2183$ $N' = 22939$ $2\lambda' = 237,10$

Nordende	Galvanometerausschläge		Differenz	Südende	Galvanometerausschläge		Differenz
	beobachtet	berechnet			beobachtet	berechnet	
$z = 200,01$	0,25	0,15	+0,10	-200,01	- 0,22	- 0,15	-0,07
	0,30		+0,15		- 0,23		-0,08
	0,11		-0,04		- 0,21		-0,06
150,29	22,00	20,91	+1,09	-150,29	-19,60	-20,91	+1,31
	21,68		+0,77		-19,30		+1,61
	21,60		+0,69		-19,90		+1,01
125,43	22,81	21,84	+0,97	-125,43	-21,34	-21,84	+0,50
	21,00		-0,84		-21,47		+0,37
	22,80		+0,96		-21,29		+0,55
100,57	16,94	15,26	+1,68	-100,57	-16,65	-15,26	-1,39
	16,93		+1,67		-16,81		-1,55
	16,90		+1,64		-16,90		-1,64
75,71	11,57	10,90	+0,67	- 75,71	-12,27	-10,90	-1,37
	11,27		+0,37		-12,91		-2,01
	11,29		+0,39		-		-
50,83	6,33	7,06	-0,73	- 50,83	- 6,33	- 7,06	+0,73
	6,35		-0,71		- 6,35		+0,71
	6,40		-0,66		- 6,38		+0,68
25,97	1,83	2,77	-0,94	- 25,97	- 2,80	- 2,77	-0,03
	1,82		-0,95		- 2,65		+0,12
	1,82		-0,95		- 2,65		+0,12

Integral aufstellen u. s. f., indem man jedesmal die X -Axe durch ds gehen lässt. Dies Verfahren, die Wirkung des Ringes auf den Drahtkreis zu finden, ist aber gleichbedeutend mit einer Integration in Bezug auf φ . Diese Art der Betrachtung hat den Vorthail, dass der Nenner ϱ^3 unabhängig von ψ wird.

Statt eines Ringes von der Breite du haben wir nun einen Cylinder von der Länge $2l =$ der Länge des Magnets. Lassen wir die Mitte des Magnets mit dem Coordinatenanfangspunkte zusammenfallen, so ist, wie früher, die Dichte μ eine Function von z , die bei vollständig regelmässiger Magnetisirung nur ungerade Potenzen von z enthalten würde. Setzen wir wie oben $u = z - Z$, also $du = dz$, so ist:

$$f(z - Z) = f(u) = \mu_0 u^0 + \mu_1 u^1 + \mu_2 u^2 + \dots,$$

und auch hier ist es möglich, μ_k als Function von Z und den in $f(z)$ auftretenden Coëfficienten M_k zu bestimmen. Wir werden uns aber auf nur wenige Glieder der Reihe für $f(z)$ beschränken müssen, denn wir werden sehen, dass die numerischen Rechnungen bereits so sehr bedeutend werden, auch kann man leicht nach den folgenden Entwicklungen noch mehr Glieder berücksichtigen, falls dies nöthig werden sollte.

$$\text{Wir setzen also} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{n=3} M_n z^n, \quad \text{mithin auch:}$$

$$f(u) = \sum_{m=0}^{m=3} \mu_m u^m.$$

Vernachlässigt man dann aus denselben Gründen wie auf p. 425 die Verschiebung der Rolle gegen die magnetischen Punkte, indem man dieselbe überall gleich gross macht, so erhält man als Inductionsstrom, der von dem Magnetismus des Cylindermantels hervorgebracht wird:

$$\int_{\psi=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{u=u_1}^{u_2} \frac{f(u) (R - r_1 \cos \varphi) R d\psi \cdot r_1 d\varphi \cdot du}{(u^2 + R^2 + r_1^2 - 2 R r_1 \cos \varphi)^{\frac{3}{2}}},$$

worin

$$u_1 = -(l + Z)$$

$$u_2 = l - Z.$$

$$i = \int_{\psi=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{r_1} \frac{F(r) (R - r \cos \varphi) r dr R d\psi}{\{\psi^2 + R^2 + r^2 - 2R \cos \varphi\}^{\frac{3}{2}}} d\varphi.$$

Da sich nun in unserem Falle eine der Endflächen in der Entfernung $v = u_1$, die andere in der Entfernung $v = u_2$ von der Inductionsrolle befindet, so erhalten wir, wenn die Functionen, welche die Vertheilung in den Endflächen angeben, mit den zugehörigen Indices versehen werden, als Gesamtinductionsstrom:

$$(II) \quad J_z = \int_{\psi=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{u=u_1}^{u_2} \frac{f(u) (R - r_1 \cos \varphi) R d\psi r_1 d\varphi \cdot du}{\{u^2 + R^2 + r_1^2 - 2Rr_1 \cos \varphi\}^{\frac{3}{2}}} \\ + \int_{\psi=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{r_1} \frac{F_1(r) (R - r \cos \varphi) r dr d\varphi R d\psi}{\{u_1^2 + R^2 + r^2 - 2Rr \cos \varphi\}^{\frac{3}{2}}} \\ + \int_{\psi=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{r_1} \frac{F_2(r) (R - r \cos \varphi) r dr d\varphi R d\psi}{\{u_2^2 + R^2 + r^2 - 2Rr \cos \varphi\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Darin gehört also $F_1(r)$ der Südfläche, $F_2(r)$ der Nordfläche an.

Setzen wir $R - r_1 \cos \varphi = p$ und $R^2 + r_1^2 - 2Rr_1 \cos \varphi = P$, so folgt:

$$\int_{\psi} \int_{\varphi} \int_u \frac{f(u) \cdot p \cdot R d\psi r_1 d\varphi \cdot du}{(u^2 + P)^{\frac{3}{2}}} \\ = 2Rr_1 \pi \left\{ \mu_0 u \left[R \int \frac{d\varphi}{P(u^2 + P)^{\frac{1}{2}}} - r_1 \int \frac{\cos \varphi d\varphi}{P(u^2 + P)^{\frac{1}{2}}} \right] \right. \\ \left. - \mu_1 \left[R \int \frac{d\varphi}{(u^2 + P)^{\frac{1}{2}}} - r_1 \int \frac{\cos \varphi d\varphi}{(u^2 + P)^{\frac{1}{2}}} \right] \right. \\ \left. - \mu_2 \left[u R \int \frac{d\varphi}{(u^2 + P)^{\frac{1}{2}}} - u r_1 \int \frac{\cos \varphi d\varphi}{(u^2 + P)^{\frac{1}{2}}} + R \int \log \text{nat} (u + \sqrt{u^2 + P}) d\varphi \right. \right. \\ \left. \left. - r_1 \int \cos \varphi \log \text{nat} (u + \sqrt{u^2 + P}) d\varphi \right] \right\}$$

$$+ \mu_3 \left[u^2 R \int \frac{d\varphi}{(u^2 + P)^{\frac{1}{2}}} - u^2 r \int \frac{\cos \varphi d\varphi}{(u^2 + P)^{\frac{1}{2}}} + 2R(R^2 + r_1^2) \int \frac{d\varphi}{(u^2 + P)^{\frac{1}{2}}} \right. \\ \left. - 2r_1(r_1^2 - R^2) \int \frac{\cos \varphi d\varphi}{(u^2 + P)^{\frac{1}{2}}} + 4Rr_1^2 \int \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{(u^2 + P)^{\frac{1}{2}}} \right] \Bigg\}.$$

Da sämtliche Integrale die Grenzen 0 und 2π haben, so sind diese fortgelassen.

Lösen wir die Bezeichnungen p und P auf und setzen jetzt zur Vereinfachung:

$$d = R^2 + r_1^2, \quad D = u^2 + R^2 + r_1^2,$$

so folgt nach einigen Rechnungen durch die Substitution:

$$(\alpha) \quad \varphi = \pi - \chi, \cos \chi = 1 - 2\sin^2 \frac{1}{2}\chi \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}\chi = \pi - \psi$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{P(u^2 + P)^{\frac{1}{2}}} = \frac{8}{(R + r_1)^2 \sqrt{u^2 + (R + r_1)^2}} \Pi\left(\frac{\pi}{2}, n, c_u\right),$$

$$\text{wenn:} \quad n = \frac{-2Rr_1}{(R + r_1)^2}, \quad c_u = \frac{4Rr_1}{u^2 + (R + r_1)^2}.$$

Ebenso nach (α) :

$$\int \frac{\cos \varphi d\varphi}{P(u^2 + P)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-2}{(R + r_1)^2 \sqrt{u^2 + (R + r_1)^2}} \left\{ \int \frac{d\psi}{(1 + n \sin^2 \psi) \sqrt{1 - c_u^2 \sin^2 \psi}} \right. \\ \left. - \int \frac{2 \sin^2 \psi d\psi}{(1 + n \sin^2 \psi) \sqrt{1 - c_u^2 \sin^2 \psi}} \right\};$$

da nun:

$$\int \frac{2 \sin^2 \psi d\psi}{(1 + n \sin^2 \psi) \sqrt{1 - c_u^2 \sin^2 \psi}} = \frac{2}{n} \int \frac{d\psi}{\sqrt{1 - c_u^2 \sin^2 \psi}} \\ - \frac{2}{n} \int \frac{d\psi}{(1 + n \sin^2 \psi) \sqrt{1 - c_u^2 \sin^2 \psi}},$$

so folgt:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{P(u^2 + P)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-8}{(R + r_1)^2 \sqrt{u^2 + (R + r_1)^2}} \left\{ \frac{n+2}{n} \Pi\left(\frac{\pi}{2}, n, c_u\right) - \frac{2}{n} F\left(\frac{\pi}{2}, c_u\right) \right\}.$$

Ferner:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(u^2 + P)^{\frac{1}{2}}} = \frac{8}{\sqrt{u^2 + (R + r_1)^2}} F\left(\frac{\pi}{2}, c_u\right).$$

Ferner nach (α):

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(u^2 + P)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-8}{c_u^2 \sqrt{u^2 + (R + r_1)^2}} \left\{ (1 - c_u^2) F\left(\frac{\pi}{2}, c_u\right) + E\left(\frac{\pi}{2}, c_u\right) \right\}.$$

Ferner nach (α):

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{(u^2 + P)^{\frac{1}{2}}} &= \frac{2}{\sqrt{u^2 + (R + r_1)^2}} \int \frac{d\psi}{\sqrt{1 - c_u^2 \sin^2 \psi}} \\ &- \frac{8}{\sqrt{u^2 + (R + r_1)^2}} \int \frac{\sin^2 \psi d\psi}{\sqrt{1 - c_u^2 \sin^2 \psi}} + \frac{8}{\sqrt{u^2 + (R + r_1)^2}} \int \frac{\sin^4 \psi d\psi}{\sqrt{1 - c_u^2 \sin^2 \psi}}. \end{aligned}$$

Zur Reduction des letzten dieser Integrale benutzen wir die von Legendre¹⁾ entwickelte Gleichung:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi} \cos \varphi \sin^{2k-3} \varphi &= (2k - 3) Z^{2k-4} \\ &- (1 + c^2) (2k - 2) Z^{2k-3} + c^2 (2k - 1) Z^{2k}, \end{aligned}$$

worin:
$$Z^{2k} = \int \frac{\sin^{2k} \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}},$$

daher für $k = 2$:

$$3c_u^2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin^4 \psi d\psi}{\sqrt{1 - c_u^2 \sin^2 \psi}} = \sqrt{1 - c_u^2 \sin^2 \psi} - Z^0 + (1 + c_u^2) 2 Z^2,$$

durch Einsetzung folgt dann:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{u^2 + P}} &= \frac{24 c_u^4 - 64 c_u^2 + 64}{3 c_u^4 \sqrt{u^2 + (R + r_1)^2}} F\left(\frac{\pi}{2}, c_u\right) \\ &+ \frac{64 - 32 c_u^2}{3 c_u^4 \sqrt{u^2 + (R + r_1)^2}} E\left(\frac{\pi}{2}, c_u\right). \end{aligned}$$

Die folgenden Integrale lassen sich nur näherungsweise berechnen, wir schreiben der Einfachheit wegen:

$$\int_0^{2\pi} \log \operatorname{nat} (u + \sqrt{u^2 + P}) d\varphi = L_1(u, 2\pi),$$

$$\int_0^{2\pi} \cos \varphi \log \operatorname{nat} (u + \sqrt{u^2 + P}) d\varphi = L_2(u, 2\pi).$$

1) Legendre, Fonct. elliptiques, Chap. IV.

Das zweite und dritte Integral der Gleichung (II) hatte die Form:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \frac{F(r) (R - r \cos \varphi) r dr d\varphi R d\psi}{(v^2 + R^2 + r^2 - 2R \cos \varphi)^{\frac{3}{2}}},$$

dies ist für $F(r) = \pm N_0$, indem wir die Dichte des Magnetismus auf der Nordfläche positiv, die auf der Südfläche negativ nehmen:

$$\begin{aligned} &= \pm 2R\pi N_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ \frac{-R}{\sqrt{D-2Rr_1 \cos \varphi}} + \frac{R^2 \cos^2 \varphi}{(R^2 \cos^2 \varphi - V) \sqrt{D-2Rr_1 \cos \varphi}} \right. \\ &\quad - \frac{R^2 r_1 \cos \varphi}{(R^2 \cos^2 \varphi - V) \sqrt{D-2Rr_1 \cos \varphi}} + \frac{R}{V\sqrt{V}} - \frac{R^2 \cos^2 \varphi}{(R^2 \cos^2 \varphi - V) \sqrt{V}} \\ &\quad - \frac{-V R \cos^2 \varphi + 2R^2 r_1 \cos^2 \varphi - V r_1 \cos \varphi}{(V - R^2 \cos^2 \varphi) \sqrt{D-2Rr_1 \cos \varphi}} \\ &\quad - \frac{R V \sqrt{V} \cos^2 \varphi}{(V - R^2 \cos^2 \varphi)} + \cos \varphi \log \text{nat} (\sqrt{V} - 2R \cos \varphi) \\ &\quad \left. - \cos \varphi \log \text{nat} (r_1 - 2R \cos \varphi + \sqrt{D-2Rr_1 \cos \varphi}) \right\}, \\ &\text{wenn } V = v^2 + R^2; \quad D = r_1^2 + V. \end{aligned}$$

Darin ist nun:

$$\int_0^{2\pi} \frac{-R d\varphi}{\sqrt{D-2Rr_1 \cos \varphi}} = \frac{-8R}{Vv^2 + (R+r_1)^2} F\left(\frac{\pi}{2}, c_v\right),$$

worin wie oben:

$$c_v^2 = \frac{4Rr_1}{v^2 + (R+r_1)^2}.$$

Ferner durch Zerlegung in Partialbrüche und nach der Substitution (α):

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{(V - R^2 \cos^2 \varphi) \sqrt{D-2Rr_1 \cos \varphi}} = \frac{-4}{R^2} F\left(\frac{\pi}{2}, c_v\right) \\ &\quad - \frac{2\sqrt{V} \Pi\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, c_v\right)}{R(V\sqrt{V} + R) \sqrt{v^2 + (R+r_1)^2}} + \frac{2\sqrt{V} \Pi\left(\frac{\pi}{2}, \nu, c_v\right)}{R(V\sqrt{V} - R) \sqrt{v^2 + (R+r_1)^2}}, \end{aligned}$$

worin: $\nu = \frac{2R}{V\sqrt{V} - R}, \quad \lambda = \frac{-2R}{V\sqrt{V} + R}.$

Ebenso:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(V - R^2 \cos^2 \varphi) \sqrt{D - 2 R r_1 \cos \varphi}}$$

$$= \frac{-2 \Pi\left(\frac{\pi}{2}, r, c_v\right)}{R(\sqrt{V} + R) \sqrt{u^2 + (R + r_1)^2}} + \frac{2 \Pi\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, c_v\right)}{R(\sqrt{V} - R) \sqrt{u^2 + (R + r_1)^2}}.$$

Und:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^3 \varphi d\varphi}{(V - R^2 \cos^2 \varphi) \sqrt{D - 2 R r_1 \cos \varphi}}$$

$$= \frac{-8}{R^2 c_u^2 \sqrt{u^2 + (R + r_1)^2}} \left\{ (1 - c_u^2) F\left(\frac{\pi}{2}, c_v\right) + E\left(\frac{\pi}{2}, c_v\right) \right\}$$

$$+ \frac{2 V}{R \sqrt{u^2 + (R + r_1)^2}} \left\{ -\frac{\Pi\left(\frac{\pi}{2}, r, c_v\right)}{\sqrt{V} - R} + \frac{\Pi\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, c_v\right)}{\sqrt{V} + R} \right\}.$$

Ferner:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{V - R^2 \cos^2 \varphi} = -\frac{2\pi}{R}.$$

Ferner:

$$\int_0^{2\pi} \cos \varphi \log \text{nat} (\sqrt{V} - 2 R \cos \varphi) d\varphi = -\frac{2 R \sqrt{V}}{4 R^2} 2\pi.$$

Das folgende Integral muss näherungsweise berechnet werden, wir setzen zur Vereinfachung:

$$\int_0^{2\pi} \cos \varphi \log \text{nat} (r_1 - 2 R \cos \varphi + \sqrt{D - 2 R r_1 \cos \varphi}) d\varphi = L_3(v_1 2\pi).$$

Setzen wir nun zur Abkürzung:

$$A_0 = \left| \frac{8u}{n(R + r_1)^2 \sqrt{u^2 + (R + r_1)^2}} \left\{ [u(R + r_1) + 2r] \Pi\left(\frac{\pi}{2}, n, c_u\right) - 2r_1 F\left(\frac{\pi}{2}, c_u\right) \right\} \right|.$$

$$A_1 = - \left| \frac{8}{c_u^2 \sqrt{u^2 + (R + r_1)^2}} \left\{ [c_u^2 R + r_1 (1 - c_u^2)] F\left(\frac{\pi}{2}, c_u\right) + r_1 E\left(\frac{\pi}{2}, c_u\right) \right\} \right|.$$

$$A_2 = - \left[\frac{8u}{c_u^2 \sqrt{u^2 + (R+r_1)^2}} \left\{ [c_u^2 R + r_1(1-c_u^2)] F\left(\frac{\pi}{2}, c_u\right) + r_1 E\left(\frac{\pi}{2}, c_u\right) \right\} + R L_1(u, 2\pi) - r_1 L_2(u, 2\pi) \right].$$

$$A_3 = + \left[\frac{8}{3c_u^4 \sqrt{u^2 + (R+r_1)^2}} \left\{ [3c_u^4 R(D+R^2) + 3c_u^2 r_1(u^2 + 2r_1^2 - 2R^2)(1-c_u^2) + Rr_1^2(12c_u^4 - 32c_u^2 + 32)] \times F\left(\frac{\pi}{2}, c_u\right) + [3r_1 c_u^2(u^2 + 2r_1^2 - 2R^2) + 16R(2-c_u^2)] E\left(\frac{\pi}{2}, c_u\right) \right\} \right].$$

$$C = \left[4 \left\{ \frac{4r_1 - 2c_u^2(R-2r_1)}{c_u^2 \sqrt{u^2 + (R+r_1)^2}} - \frac{V-R^2}{R} \right\} F\left(\frac{\pi}{2}, c_u\right) + \frac{16r_1}{c_u^2 \sqrt{u^2 + (R+r_1)^2}} E\left(\frac{\pi}{2}, c_u\right) + \frac{16R^2 r_1 + 2R\sqrt{V}(V-R^2) - 2r_1(\sqrt{V}-R)^2}{R(\sqrt{V}+R)\sqrt{u^2 + (R+r_1)^2}} \Pi\left(\frac{\pi}{2}, r, c_u\right) + \frac{-16R^2 r_1 + 2R\sqrt{V}(V-R^2) + 2r_1(\sqrt{V}+R)^2}{R(\sqrt{V}+R)\sqrt{u^2 + (R+r_1)^2}} \Pi\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, c_u\right) - L_3(u, 2\pi) + \frac{2R\pi}{V} + \frac{V-R^2}{VR} 2\pi - \frac{\pi\sqrt{V}}{R} \right]$$

darin:

$$c_u = \frac{4Rr_1}{u^2 + (R+r_1)^2}, \quad V = u^2 + R^2, \quad n = \frac{-2Rr_1}{(R+r_1)^2},$$

$$v = \frac{2R}{(R+r_1)^2}, \quad \lambda = \frac{-2R}{\sqrt{V}+R}.$$

Dann ist der Gesamtinduktionsstrom:

$$J_z = 2Rr_1 \pi \left\{ \mu_0 A_0 + \mu_1 A_1 + \mu_2 A_2 + \mu_3 A_3 \right\} + 2R\pi N_0 C$$

$$= 2Rr_1 \pi \sum_{m=0}^{m=3} \mu_m A_m + 2R\pi N_0 C.$$

Nach p. 424 ist nun:

$$\mu_m = \sum_{n \geq m} M_n {}^m \mathfrak{B}^n Z^{n-m}$$

also auch nach p. 426:

$$\sum_m \mu_m A_m = \sum_{n=0}^{n=3} M_n \{[A + Z]^n\}.$$

Mithin:

$$J_s = 2 R r_1 \pi \sum_{n=0}^{n=3} M_n \{[A + Z]^n\} + 2 R \pi N_0 C.$$

Um obige Entwicklungen für das numerische Rechnen brauchbar zu machen, reduciren wir die elliptischen Integrale III. Gattung auf solche I. und II. Gattung.

Zu diesem Zwecke sind die Parameter näher zu untersuchen.

Da $R > r_1$ ist, hat man:

$$0 > n > -1, \quad +\infty > \nu > 0, \quad 0 > \lambda > -1.$$

Bedeutet daher ϑ einen Winkel, so kann man stets setzen:

$$\nu = \cotg^2 \vartheta.$$

Ferner ist für:

$$0 \geq u \geq R + r_1, \quad 1 \geq -n \geq c_u^2,$$

wenn also b_u der zu c_u complementäre Modul ist, und θ einen Winkel bezeichnet, so kann man setzen:

$$n = -1 + b_u^2 \sin^2 \theta.$$

Für $R + r_1 \geq u$ ist $c_u^2 \geq -u \geq \pm 0$, wir können daher setzen:

$$n = -c_u^2 \sin^2 \theta.$$

Einen ähnlichen Einfluss hat der Werth von u auf die Darstellung von λ .

Die Bedingung, dass für einen Werth u_* das Quadrat des Moduls gleich dem absoluten Werth des Parameters gleich sei, ist:

$$u_* = \sqrt{3r_1^2 - R^2 \pm r \cdot \sqrt{10r_1^2 - 4R^2}}.$$

Ist also $R > \frac{1}{2} r_1 \sqrt{10}$,

so ist stets $c_u^2 > \lambda \geq -1$.

In diesem Falle kann man setzen:

$$\lambda = -c_u^2 \sin^2 \tau.$$

Wenn aber: $R \leq \frac{1}{2} r_1 \sqrt{10}$,

Die Integration von (2) ist demnach auf diejenige von (6) und (7) zurückgeführt. Für die Correctionsgrößen auf der linken Seite von (7) setzen wir jetzt ihre *angenäherten* Werthe ein, berechnet aus:

$$\varphi_0 = \frac{v_0}{\beta} e^{-mt} \sin \beta t,$$

d. i. aus dem Integrale von (4) unter den Voraussetzungen, die wir auch für das Integral von (2) später einführen wollen, dass für $t = 0$ auch $\varphi = 0$ ist und $\frac{d\varphi}{dt} = v_0$.

Dann wird aus (7):

$$7_a) \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{v_0}{\beta} \right)^3 e^{-3mt} \{ (n^2 n_1 - 2m^2 m_1) \sin \beta t^3 + 2mm_1 \beta \sin \beta t^2 \cos \beta t \} \\ & = \beta e^{-mt} \left(\cos(\beta t + B) \frac{dA}{dt} - A \sin(\beta t + B) \frac{dB}{dt} \right). \end{aligned} \right.$$

Setzen wir:

$$(8) \quad u = A \sin B, \quad w = A \cos B,$$

woraus folgt:

$$\frac{du}{dt} = A \cos B \frac{dB}{dt} + \sin B \frac{dA}{dt},$$

$$\frac{dw}{dt} = -A \sin B \frac{dB}{dt} + \cos B \frac{dA}{dt},$$

so wird aus den Gleichungen (6) und (7_a):

$$0 = \sin \beta t \frac{dw}{dt} + \cos \beta t \frac{du}{dt},$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{v_0}{\beta} \right)^3 \frac{e^{-2mt}}{\beta} \{ (n^2 n_1 - 2m^2 m_1) \sin \beta t^3 + 2mm_1 \beta \sin \beta t^2 \cos \beta t \} \\ & = -\sin \beta t \frac{du}{dt} + \cos \beta t \frac{dw}{dt}; \end{aligned}$$

und durch Auflösung nach $\frac{du}{dt}$ und $\frac{dw}{dt}$:

$$1) \quad \beta \frac{du}{dt} = \left(\frac{v_0}{\beta} \right)^3 e^{-2mt} \{ p_1 \sin \beta t^4 + p_2 \sin \beta t^3 \cos \beta t + p_3 \sin \beta t^2 \cos \beta t^2 \},$$

$$2) \quad \beta \frac{dw}{dt} = \left(\frac{v_0}{\beta} \right)^3 e^{-2mt} \{ q_1 \sin \beta t^4 + q_2 \sin \beta t^3 \cos \beta t + q_3 \sin \beta t^2 \cos \beta t^2 \},$$

worin die Constanten p, q durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} p_1 &= 2m^2 m_1 - n^2 n_1 & q_1 &= 0 \\ p_2 &= -2mm_1 \beta & q_2 &= -p_1 \\ p_3 &= 0 & q_3 &= -p_2 \end{aligned} \quad \text{bestimmt sind.}$$

$$\sin(\beta t + B)^3 = \sin \beta t^3 + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^2.$$

Ferner ist:

$$(15) \quad \begin{cases} A^2 = u^2 + w^2 = \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 \left(1 + 2 \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 W + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^4\right), \\ A = \frac{v_0}{\beta} \left(1 + \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 W\right) = w + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^5. \end{cases}$$

Darnach wird:

$$\varphi^3 = A^3 e^{-3mt} \sin(\beta t + B)^3 = \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^3 e^{-3mt} \sin \beta t^3 + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^5 e^{-3mt}$$

oder:

$$\varphi^3 - \varphi_0^3 = e^{-3mt} \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^5.$$

Ganz analog leitet man ab, dass:

$$\varphi^2 \frac{d\varphi}{dt} - \varphi_0^2 \frac{d\varphi}{dt} = \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^5$$

ist. Darnach erhält also die obige Gleichung für $(\varphi - \varphi^*)$ die Form:

$$\frac{d^2(\varphi - \varphi^*)}{dt^2} + 2m \frac{d(\varphi - \varphi^*)}{dt} + n^2 (\varphi - \varphi^*) = \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^5 F(t).$$

Da nun φ und φ^* und auch ihre Derivierten für $t=0$ übereinstimmen, so würden die Anfangsbedingungen dieser Differentialgleichung sein:

$$t = 0, \quad \varphi - \varphi^* = 0 \quad \frac{d}{dt}(\varphi - \varphi^*) = 0.$$

Eine Integration dieser Gleichung würde, ganz wie diejenige der Gleichung (2), auf die Form führen:

$$\varphi - \varphi^* = A_1 e^{-mt} \sin(\beta t + B_1),$$

und zwar ist, infolge der eben ausgesprochenen Anfangsbedingungen:

$$A_1 = \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^5 W_1(\varphi, t), \quad B_1 = U_1(\varphi, t),$$

worin W_1 und U_1 eine den obigen W und U analoge Form besitzen, d. h. also $\varphi - \varphi^*$ ist eine Grösse von der Ordnung $\left(\frac{v_0}{\beta}\right)^5$.

Es ergibt sich daher das Theorem:

§ 3.

Aus dem gewonnenen Integral sind die Gleichungen für die der Beobachtung zugänglichen Grössen, die Schwingungsdauer, das logarithmische Decrement, und für den Ausschlagswinkel bei einer gegebenen Anfangsgeschwindigkeit abzuleiten.

Aus (3) folgt für die Schwingungsdauer τ , d. i. für die kleinste Differenz zweier Werthe von t , für welche $\varphi=0$ wird, die Bedingungsgleichung:

$$\beta\tau + B(\tau) = \pi,$$

worin τ als Argument von B hinzugefügt ist. Nach (14) ist:

Die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + P(\varphi) \frac{d\varphi}{dt} + Q(\varphi) = 0$$

besitzt einen nur von t abhängigen integrierenden Factor nur dann, wenn:

$$P(\varphi) = \frac{1}{C} \frac{dQ(\varphi)}{d\varphi} + C$$

ist, und zwar ist dieser Factor e^{Ct} . Dadurch wird die ursprüngliche Gleichung auf folgende:

$$e^{Ct} \left(\frac{d\varphi}{dt} + \frac{Q(\varphi)}{C} \right) = \text{Constans}$$

zurückgeführt. In unserem Falle ist:

$$P(\varphi) = 2m(1 - m_1 \varphi^2), \quad Q(\varphi) = n^2(\varphi - n_1 \varphi^3),$$

$$\frac{dQ(\varphi)}{d\varphi} = n^2(1 - 3n_1 \varphi^2).$$

Es müsste also, damit die obige Bedingung erfüllt ist:

$$2m(1 - m_1 \varphi^2) = \frac{n^2}{C}(1 - 3n_1 \varphi^2) + C,$$

oder:

$$C = m \pm \sqrt{m^2 - n^2}, \quad m_1 = \frac{3}{2} n_1 \frac{n^2}{mC}$$

sein. C also auch m_1 würde daher nur im Falle einer aperiodischen Schwingung reell sein. Eine specielle Anwendung des obigen Satzes (für $P = \text{Const.}$, $Q(\varphi) = n^2 \varphi$) liegt dem Verfahren zu Grunde, welches Du Bois-Reymond (Berlin. Monatsber. p. 539, 1870) bei der Integration der Differentialgleichung der Bewegung aperiodisch schwingender Magnete befolgt hat.

Aus dieser Gleichung ist ersichtlich, dass δ_1 von der Ordnung $\left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2$ ist, also δ_1^2 und $\delta_1 \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2$ vernachlässigt werden können, sodass wir erhalten:

$$\delta_1 + \frac{2m\pi}{\beta^2} \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 C_0 + \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 \frac{C_0}{\beta} \left(e^{-\frac{2m\pi}{\beta}} - 1\right) + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^4 = 0.$$

Die Einsetzung von τ_2 und δ_1 in die Gleichung:

$$\tau_1 = \tau_2 + \frac{\delta_1}{\beta}$$

ergibt: $\tau_1 = \frac{\pi}{\beta} - \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 \frac{C_0}{\beta^2} \left(e^{-\frac{2m\pi}{\beta}} - 1\right) + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^4.$

Sei endlich die gesuchte Grösse τ , welche der Gleichung:

$$\beta\tau + \frac{\beta}{v_0} u(\tau) = \pi$$

genügen soll, gleich $\tau_1 + \frac{\delta}{\beta}$, so ist diese Gleichung jetzt zurückgeführt auf die folgende:

$$\delta + \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 \frac{e^{-2m\left(\tau_1 + \frac{\delta}{\beta}\right)}}{\beta} \cdot \times \left\{ \begin{array}{l} 2C_1 \sin(\beta\tau_1 + \delta) \{ \beta \cos(\beta\tau_1 + \delta) + m \sin(\beta\tau_1 + \delta) \} \\ + 2C_2 \sin(\beta\tau_1 + \delta)^3 \{ 2\beta \cos(\beta\tau_1 + \delta) + m \sin(\beta\tau_1 + \delta) \} \\ + C_3 \sin(\beta\tau_1 + \delta)^4 \end{array} \right\} + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^4 = 0.$$

Diese zeigt wieder, dass die Grössen δ^2 und $\delta \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2$ zum mindesten von der Ordnung $\left[\frac{v_0}{\beta}\right]^4$ sind.

In den Argumenten der trigonometrischen Functionen brauchen daher nur die Glieder ohne $\left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2$ und ohne δ berücksichtigt zu werden; nun ist:

$$\begin{aligned} \sin(\beta\tau_1 + \delta) &= \sin \beta\tau_1 + \delta \cdot \cos \beta\tau_1 \\ &= \sin \left(\pi - \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^2 \right) + \delta \cdot \cos \left(\pi - \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^2 \right) \\ &= \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^2. \end{aligned}$$

d. h. δ besitzt nur einen Werth von der Ordnung $\left[\frac{v_0}{\beta}\right]^4$.
Die Gleichung:

$$(17) \quad \tau = \frac{\pi}{\beta} - \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 \frac{C_0}{\beta^2} \left(e^{-\frac{2m\pi}{\beta}} - 1\right) + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^4$$

stellt daher die Schwingungsdauer dar. Die Grösse $\frac{v_0}{\beta}$ wird passender noch durch den Ausschlagswinkel α ausgedrückt. Die Differentiation des Integrals:

$$\varphi = A e^{-mt} \sin(\beta t + B)$$

gibt mit Rücksicht auf (6):

$$\frac{d\varphi}{dt} = A e^{-mt} \{-m \sin(\beta t + B) + \beta \cos(\beta t + B)\}.$$

Daraus folgt, dass zur Zeit t' , wenn $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{t=t'} = 0$:

$$\operatorname{tg}(\beta t' + B(t')) = \frac{\beta}{m}, \quad \sin(\beta t' + B(t')) = \frac{\beta}{n}$$

wird, also der Ausschlagswinkel:

$$\alpha = A(t') \frac{\beta}{n} \cdot e^{-mt'}.$$

Nach (15) ist nun:

$$A = \frac{v_0}{\beta} \left(1 + \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 W\right) + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^5$$

und daher:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{v_0}{\beta} \left(1 + \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 W(t')\right) e^{-mt'} \frac{\beta}{n} + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^5 \\ \frac{v_0}{\beta} &= \alpha \frac{n}{\beta} e^{mt'} \left\{1 - \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 W(t') + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^4\right\} \\ \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 &= \alpha^2 \frac{n^2}{\beta^2} e^{2mt'} + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^4. \end{aligned}$$

Ferner ist: $\beta t' + B(t') = \arctg \frac{\beta}{m},$

und mit Rücksicht auf (14):

$$t' = \frac{1}{\beta} \arctg \frac{\beta}{m} + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^2,$$

daher wird:

$$(18) \quad \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 = \alpha^2 \frac{n^2}{\beta^2} e^{\frac{2m}{\beta} \arctg \frac{\beta}{m}} + [\alpha]^4.$$

Gleichung (17) erhält darnach die Form:

$$\tau = \frac{\pi}{\beta} - \alpha^2 \frac{n^2 C_0}{\beta^4} e^{\frac{2m}{\beta} \arctan \frac{\beta}{m}} \left(e^{-\frac{2m\pi}{\beta}} - 1 \right) + [\alpha]^4,$$

oder nach dem Einsetzen des Werthes von C_0 :

$$(19) \quad \tau = \frac{\pi}{\beta} (1 - S_1 \alpha^2) + [\alpha]^4,$$

worin:

$$S_1 = \frac{3}{4} \frac{S}{m} \frac{\beta}{\pi} \cdot e^{\frac{2m}{\beta} \arctan \frac{\beta}{m}} \left(1 - e^{-\frac{2m\pi}{\beta}} \right)$$

ist, und wie oben:

$$S = \frac{m^2 m_1 - n^2 n_1}{4n^2 - 3m^2}.$$

Hieraus ist zunächst ersichtlich, dass das Vorzeichen von S_1 durch S bestimmt wird, also wesentlich von dem Verhältniss der Werthe m_1 und n_1 abhängig ist. Bei rascher Abnahme der Dämpfung mit wachsendem Winkel tritt der Fall ein, dass die Schwingungsdauer mit wachsendem Bogen abnimmt, also eine Correction anzubringen ist, die sogar das entgegengesetzte Zeichen hat wie die gewöhnlich angewandte. So hat z. B. bei beiden oben untersuchten Multiplicatoren S einen positiven Werth, wie die unten angegebenen Zahlen lehren werden.

Ist im speciellen Falle $m^2 m_1 - n^2 n_1 = 0$, so sind die Schwingungsbogen nahezu ohne Einfluss auf die Schwingungsdauer. Für $m_1 = 0$ dagegen hat immer die Correctionsgrösse ($-S_1$) das positive Vorzeichen. Für $m = 0$, $m_1 = 0$, $n_1 = \frac{1}{1.2.3}$ endlich, in welchem Falle die Differentialgleichung (2) in die folgende, abgesehen von fünften Potenzen von φ :

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + n^2 \sin \varphi = 0$$

übergeht, erhält man aus der Gleichung (19) mit Berücksichtigung des Grenzwertes:

$$\lim_{m \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-\frac{2m\pi}{\beta}}}{m} = \frac{2\pi}{\beta}, \text{ für } \lim m = 0$$

werde dann eingesetzt:

$$\tau' = \tau'_1 + \frac{\delta}{\beta}.$$

Berücksichtigt man, dass im Argumente der trigonometrischen Functionen in dem Ausdrucke für u , da diese Glieder schon den Factor $\left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2$ besitzen, nur die Grössen ohne den Factor $\left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2$ und ohne δ beachtet zu werden brauchen, und wendet die Gleichungen an:

$$(21) \quad \begin{cases} \sin(\beta\tau' + \beta t') = -\sin \beta t' + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^2 \\ \cos(\beta\tau' + \beta t') = -\cos \beta t' + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^2, \end{cases}$$

so wird man erhalten:

$$\tau' = \frac{\pi}{\beta} - \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 \frac{e^{-\frac{2m\pi}{\beta}} - 1}{\beta^2} e^{-2mt'} \left\{ \begin{aligned} &C_0 + 2C_1 \sin \beta t' (\beta \cos \beta t' + m \sin \beta t') \\ &+ 2C_2 \sin \beta t'^3 (2\beta \cos \beta t' + m \sin \beta t') \\ &+ 2C_3 \sin \beta t'^4 \end{aligned} \right\}$$

woraus sich mit Hülfe der Gleichungen:

$$\sin \beta t' = \frac{\beta}{n} + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^2, \quad \cos \beta t' = \frac{m}{n} + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^2,$$

und nach Einsetzen der Werthe der Constanten C_0 C_1 C_2 C_3 (13) ergibt:

$$(22) \quad \tau' = \frac{\pi}{\beta} - \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 \frac{\beta^2}{2n^2m} \left(1 - e^{-\frac{2m\pi}{\beta}}\right) \left(\frac{3S}{2} + \frac{m^2}{n^2} (m_1 + 9S)\right) e^{-2mt'},$$

und hieraus infolge von:

$$\begin{aligned} \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 &= \alpha_1^2 \frac{n^2}{\beta^2} e^{2mt'} + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^4 \\ \tau' &= \frac{\pi}{\beta} - \alpha_1^2 \frac{1}{2m} \left(1 - e^{-\frac{2m\pi}{\beta}}\right) \left(\frac{3S}{2} + \frac{m^2}{n^2} (m_1 + 9S)\right). \end{aligned}$$

Diesen Werth werden wir später in die Gleichung für das Decrement einsetzen. Aus den beiden Formeln für α_1 und α_2 ergibt sich zunächst:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{A(t')}{A(t' + \tau')} e^{m\tau'}.$$

Nun war nach (15):

$$A(t') = w(t') + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^5 = \frac{v_0}{\beta} \left(1 + \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 W(t')\right) + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^5$$

oder, wenn wir: $A(t') = e^{A_1(t')}$

setzen, so wird:

$$\begin{aligned} A_1(t') &= \log \frac{v_0}{\beta} + \log \left(1 + \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 W(t')\right) \\ &= \log \frac{v_0}{\beta} + \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 W(t') + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^4 \end{aligned}$$

und daher:

$$\frac{A(t')}{A(t' + \tau')} = e^{A_1(t') - A_1(t' + \tau')} = e^{\left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 (W(t') - W(t' + \tau'))}.$$

Das logarithmische Decrement λ ist also:

$$(23) \quad \lambda = \log \text{nat} \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = m\tau' + \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 \{W(t') - W(t' + \tau')\},$$

worin:

$$\begin{aligned} W(t') &= \frac{C'_0}{\beta} \left(e^{-2mt'} - 1\right) + \frac{e^{-2mt'}}{\beta} \cdot \times \\ &\quad \times \left\{ \begin{aligned} &2C'_1 \sin \beta t' (\beta \cos \beta t' + m \sin \beta t') \\ &+ 2C'_2 \sin \beta t'^3 (2\beta \cos \beta t' + m \sin \beta t') \\ &+ C'_3 \sin \beta t'^4 \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

ist. Bei der Bildung der Differenz $W(t') - W(t' + \tau')$ sind die Gleichungen (21) zu berücksichtigen, und man erhält so:

$$\begin{aligned} W(t') - W(t' + \tau') &= e^{-2mt'} (1 - e^{-2m\tau'}) \cdot \times \\ &\quad \times \left\{ \begin{aligned} &\frac{C'_0}{\beta} + \frac{2C'_1}{\beta} \sin \beta t' (\beta \cos \beta t' + m \sin \beta t') \\ &+ \frac{2C'_2}{\beta} \sin \beta t'^3 (2\beta \cos \beta t' + m \sin \beta t') \\ &+ \frac{C'_3}{\beta} \sin \beta t'^4 \end{aligned} \right\}. \end{aligned}$$

Die weitere Ausrechnung, die ganz analog der bei der Ableitung von τ' durchgeführten ist, ergibt dann:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 \{W(t') - W(t' + \tau')\} \\ &= -\frac{\alpha_1^2}{4} \left(1 - e^{-\frac{2m\pi}{\beta}}\right) \left(\frac{m_1 - 3S}{2} + \frac{m^2}{n^2} (m_1 - 9S) - n_1\right) \end{aligned}$$

Dieser Werth, sowie der von τ' , sind in die Gleichung (23) einzusetzen, und man erhält dann:

$$\lambda = \frac{m\pi}{\beta} - \frac{\alpha_1^2}{8} \left\{ (m_1 + 3S) \left(1 + 6 \frac{m^2}{n^2} \right) - 2n_1 \right\} \left\{ 1 - e^{-\frac{2m\pi}{\beta}} \right\},$$

oder mit Hülfe von:

$$m_1 + 3S = n^2 \frac{4m_1 - 3n_1}{4n^2 - 3m^2}$$

den zur Rechnung bequemern Ausdruck:

$$(24) \quad \lambda = \frac{m\pi}{\beta} - \frac{\alpha_1^2}{8} \left\{ m_1 \frac{1 + 6 \frac{m^2}{n^2}}{1 - \frac{3}{4} \frac{m^2}{n^2}} - \frac{11}{4} n_1 \frac{1 + \frac{12}{11} \frac{m^2}{n^2}}{1 - \frac{3}{4} \frac{m^2}{n^2}} \right\} \left\{ 1 - e^{-\frac{2m\pi}{\beta}} \right\}.$$

Hieraus geht hervor, dass die Dämpfung mit wachsendem Ausschlagswinkel abnimmt, wenn:

$$m_1 \left(1 + 6 \frac{m^2}{n^2} \right) > \frac{11}{4} n_1 \left(1 + \frac{12}{11} \frac{m^2}{n^2} \right)$$

ist, wie es bei den meisten Galvanometern der Fall sein wird. Ist dagegen die Dämpfungsfunction constant, also $m_1 = 0$, so nimmt das Decrement um eine n_1 proportionale Grösse mit wachsendem Ausschlagswinkel zu.

§ 5.

Zur Ableitung der Formel für die Anfangsgeschwindigkeit gehen wir von der Gleichung:

$$\alpha_1 = A(t') \frac{\beta}{n} e^{-mt'} = \frac{v_0}{\beta} \left(1 + \left(\frac{v_0}{\beta} \right)^2 W(t') \right) \cdot \frac{\beta}{n} \cdot e^{-mt'}$$

aus, welche:

$$v_0 = n \alpha_1 e^{mt'} \left(1 - \left(\frac{v_0}{\beta} \right)^2 W(t') \right)$$

ergibt. Der Werth von t' , der zunächst bestimmt werden muss, war durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg}(\beta t' + B(t')) = \frac{\beta}{m}$$

definirt, die mit Hülfe von (14) die Form:

$$\beta t' + \frac{\beta}{v_0} u(t') = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\beta}{m}$$

erhält. Um hieraus t' zu bestimmen, sind in den Ausdruck (11) für $u(t')$ die Gleichungen:

$$(25) \quad \sin \beta t' = \frac{\beta}{n} + \left[\frac{v_0}{\beta} \right]^2, \quad \cos \beta t' = \frac{m}{n} + \left[\frac{v_0}{\beta} \right]^2$$

einsetzen und in die Glieder, welche schon den Factor $\left(\frac{v_0}{\beta} \right)^2$ haben, der Werth für t' :

$$t' = \frac{1}{\beta} \arctg \frac{\beta}{m} + \left[\frac{v_0}{\beta} \right]^2,$$

endlich die Gleichung:

$$\left(\frac{v_0}{\beta} \right)^2 = \alpha_1^2 \frac{n^2}{\beta^2} e^{2mt'}$$

und die Werthe der Constanten C . Man erhält dann nach leichten Ausrechnungen:

$$t' = \frac{1}{\beta} \arctg \frac{\beta}{m} + \frac{\alpha_1^2}{2m} \left\{ \frac{3S}{2} \left(1 - e^{-\frac{2m}{\beta} \arctg \frac{\beta}{m}} \right) + \frac{m^2}{n^2} (m_1 + 9S) \right\}.$$

Es ist daher:

$$(26) \quad e^{mt'} = e^{\frac{m}{\beta} \arctg \frac{\beta}{m}} \left\{ 1 + \frac{\alpha_1^2}{2} \left(\frac{3S}{2} \left\{ 1 - e^{\frac{2m}{\beta} \arctg \frac{\beta}{m}} \right\} + \frac{m^2}{n^2} (m_1 + 9S) \right) + [\alpha]^4 \right\}$$

Die zur Bestimmung von v_0 noch nöthige Berechnung von $\left(\frac{v_0}{\beta} \right)^2 W(t')$ ist schon auf p. 468 durchgeführt. Setzt man die Werthe von $\sin \beta t'$, $\cos \beta t'$ nach (25) und die Ausdrücke für die Constanten C_0' , C_1' , C_2' , C_3' in die dortige Gleichung ein, so ergibt sich:

$$(27) \quad \left(\frac{v_0}{\beta} \right)^2 W(t') = \alpha_1^2 \left(-\frac{1}{8} (m_1 - 3S) \left(1 - e^{\frac{2m}{\beta} \arctg \frac{\beta}{2m}} \right) - \frac{m^2}{4n^2} (m_1 - 9S) + \frac{n_1}{4} \right).$$

Infolge der Gleichungen (26) und (27) geht schliesslich:

$$v_0 = n \alpha_1 e^{mt'} \left(1 - \left(\frac{v_0}{\beta} \right)^2 W(t') \right) \quad \text{in:}$$

$$v_0 = n \alpha_1 e^{\frac{m}{\beta} \arctg \frac{\beta}{m}} \left\{ 1 - \frac{\alpha_1^2}{8} \left((m_1 + 3S) \left(e^{\frac{2m}{\beta} \arctg \frac{\beta}{m}} - 1 - 6 \frac{m^2}{n^2} \right) + 2n_1 \right) \right\}$$

über, oder in:

$$(28) \left\{ \begin{aligned} &v_0 = n \alpha_1 e^{\frac{m}{\beta} \operatorname{arctg} \frac{\beta}{m}} \cdot \times \\ &\times \left\{ 1 - \frac{\alpha_1^2}{8} \left(\frac{m_1 - \frac{3}{4} n_1}{1 - \frac{3}{4} \frac{m^2}{n^2}} e^{\frac{2m}{\beta} \operatorname{arctg} \frac{\beta}{m}} - m_1 \frac{1 + 6 \frac{m^2}{n^2}}{1 - \frac{3}{4} \frac{m^2}{n^2}} + \frac{11}{4} n_1 \frac{1 + \frac{1}{2} \frac{m^2}{n^2}}{1 - \frac{3}{4} \frac{m^2}{n^2}} \right) \right\} \end{aligned} \right\}.$$

Nach (24) ist nun für $\alpha_1 = 0$, d. h. für unendlich kleine Schwingungsbogen das log. Decrement Δ durch die Gleichung:

$$\frac{m}{\beta} = \frac{\Delta}{\pi}$$

bestimmt, demnach ist: $\frac{m^2}{n^2} = \frac{\Delta^2}{\Delta^2 + \pi^2}$.

Durch Einsetzen dieser Gleichung in die mit α_1^2 multiplizierten Glieder der Formel (24) und (28) erhalten diese die einfachere im Folgenden angegebene Gestalt.

Die letzten Resultate lassen sich zu dem Satze zusammenfassen:

Aus dem Integrale der allgemeinen Differentialgleichung:

$$(3) \quad \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2m(1 - m_1 \varphi^2) \frac{d\varphi}{dt} + n^2(\varphi - n_1 \varphi^3) = 0$$

mit den Anfangsbedingungen: Für $t=0$ ist $\varphi=0$ und $\frac{d\varphi}{dt} = v_0$, ergeben sich für die Schwingungsdauer τ , für das logarithmische Decrement $\lambda = \log \operatorname{nat} \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ und für die Anfangsgeschwindigkeit v_0 , als Functionen des Ausschlagswinkels α_1 (α_2 ist der nächstfolgende Ausschlag nach der entgegengesetzten Seite) mit Vernachlässigung der Grössen von der Ordnung α_1^4 , folgende Gleichungen:

$$(19) \quad \tau = \frac{\pi}{\beta} (1 - S_1 \alpha_1^2), \quad \beta^2 = n^2 - m^2,$$

$$(24) \quad \lambda = \frac{\pi}{\beta} m (1 - S_2 \alpha_1^2),$$

$$(28) \quad v_0 = n \alpha_1 e^{\frac{m}{\beta} \operatorname{arctg} \frac{\beta}{m}} (1 - S_3 \alpha_1^2).$$

Bezeichnet man mit Δ das logarithmische Decrement für „unendlich“ kleine Schwingungsbogen, so ist:

$$S_1 = \frac{1}{4} S \frac{1 - e^{-2A}}{A} e^{\frac{2A}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{A}};$$

$$S = \frac{1}{4} \frac{G m_1 - n_1}{1 - \frac{1}{4} G}; \quad G = \frac{A^2}{A^2 + \pi^2};$$

$$S_2 = \frac{1}{8} \frac{1 - e^{-2A}}{A} S_2^*;$$

$$S_2^* = m_1 \frac{1+6G}{1-\frac{1}{4}G} - \frac{11}{4} n_1 \frac{1+\frac{11}{4}G}{1-\frac{1}{4}G} = \frac{4m_1(7A^2 + \pi^2) - n_1(23A^2 + 11\pi^2)}{A^2 + 4\pi^2};$$

$$S_3 = \frac{1}{8} (S_3^* - S_2^*); \quad S_3^* = \frac{m_1 - \frac{1}{4} n_1}{1 - \frac{1}{4} G} e^{\frac{2A}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{A}}.$$

Um also den numerischen Werth der Correctionsgrößen S_1, S_2, S_3 bestimmen zu können, ist nur die Kenntniss von A, n_1 und m_1 nothwendig.

Der Uebersichtlichkeit halber seien noch die Gleichungen hinzugefügt, welche die Constanten π, m, n_1, m_1 auf, der Beobachtung zugängliche, Grössen zurückführen:

$$(24a) \left\{ \begin{array}{l} n = \frac{1}{\tau_0} \sqrt{\lambda_0^2 + \pi^2}, \quad n_1 = \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{f}{MT}}; \\ m = \frac{\lambda}{\tau_0} \frac{\sqrt{\lambda^2 + \pi^2}}{\sqrt{\lambda_0^2 + \pi^2}} \left(1 + \frac{\pi^2}{\lambda^2 + \pi^2} S_2 \alpha_1^2 \right) \text{ aus (24):} \end{array} \right.$$

$$\text{und } \frac{m}{\beta} = \frac{\lambda}{\pi} (1 + S_2(\lambda) \cdot \alpha_1^2), \quad \frac{m\pi}{\beta} = A = \lambda (1 + S_2(\lambda) \cdot \alpha_1^2),$$

worin $S_2(\lambda)$ die oben definirte Grösse S_2 bedeutet, wenn überall λ statt A eingesetzt ist. Allgemein kann in den obigen S_1, S_2, S_3 die Substitution λ statt A gemacht werden, die nur einen Einfluss auf Glieder mit α_1^4 ausübt.

Ferner ist:

$$\begin{aligned} m &= \frac{\lambda_0}{\tau_0} + M \\ m_1 &= \frac{M}{m} M_1 \end{aligned} \quad M(1 - M_1 \varphi^2) = \frac{1}{2KW} \cdot \left(\frac{\partial V(\varphi)}{\partial \varphi} \right)^2.$$

Die Bedeutung der hierin vorkommenden Grössen ist dieselbe wie auf p. 453 und 294:

§ 6.

Für die beiden Multiplicatoren, an denen die angegebenen Beobachtungen ausgeführt sind, ergeben sich mit Benutzung der oben (p. 292, 296) angegebenen Werthe:

Mult. I	Mult. II
$M = 0,03428$	$M = 0,03712$
$M_1 = 3,553$	$M_1 = 20,084$
$\lambda_0 \log e = 0,004$	$\lambda_0 \log e = 0,007$
$\tau_0 = 30,30$	$\tau_0 = 20,44$
$\frac{f}{MT} = 1,222$	$\frac{f}{MT} = 0,0093$

die Grössen:

$$\begin{array}{l|l} m = 0,03459 & n = 0,10369 \\ m_1 = 3,521 & n_1 = 0,07500 \end{array} \quad \begin{array}{l|l} m = 0,03791 & n = 0,15370 \\ m_1 = 19,666 & n_1 = 0,16513 \end{array}$$

und hieraus für den:

Mult. I

$$\tau = \frac{\pi}{\beta} (1 - 0,12425 \alpha_1^2)$$

$$\lambda = \frac{\pi}{\beta} m (1 - 0,61713 \alpha_1^2)$$

Mult. II

$$\tau = \frac{\pi}{\beta} (1 - 0,70430 \alpha_1^2)$$

$$\lambda = \frac{\pi}{\beta} m (1 - 3,4453 \alpha_1^2)$$

$$= n \alpha_1 e^{\frac{m}{\beta} \arctg \frac{\beta}{m}} (1 - 0,35975 \alpha_1^2); \quad v_0 = n \alpha_1 e^{\frac{m}{\beta} \arctg \frac{\beta}{m}} (1 - 1,5629 \alpha_1^2).$$

Für $\alpha_1 = (3^0) = 0,05236 \dots$

erhalten die Correctionsgrössen, (bezeichnet wie auf p. 472) die Werthe:

$$S_1 \alpha_1^2 = 0,0003$$

$$S_2 \alpha_1^2 = 0,0017$$

$$S_3 \alpha_1^2 = 0,0006$$

$$S_1 \alpha_1^2 = 0,0019$$

$$S_2 \alpha_1^2 = 0,0095$$

$$S_3 \alpha_1^2 = 0,0043$$

und für $\alpha_1 = (6^0) = 0,10472 \dots$

$$S_1 \alpha_1^2 = 0,0012$$

$$S_2 \alpha_1^2 = 0,0068$$

$$S_3 \alpha_1^2 = 0,0025$$

$$S_1 \alpha_1^2 = 0,0077$$

$$S_2 \alpha_1^2 = 0,0378$$

$$S_3 \alpha_1^2 = 0,0171$$

Vergleicht man hiermit die Grösse der Correction, welche bisher bei den Beobachtungen am Galvanometer, abgesehen von Scalenreductionen, allein angewandt ist, nämlich die Correction der Schwingungsdauer auf „unendlich“ kleine Bogen, d. i. $\frac{1}{16} \alpha_1^2$, deren Werthe sind für:

anzubringen ist, der mit dem Multiplicator II in Verbindung mit dem zu diesem Zwecke im hiesigen magnetischen Observatorium aufgestellten Weber'schen Erdinductor erhalten wird. Wendet man die Zurückwerfungsmethode an, so bedarf auch die bekannte Formel, welche aus den beiden Grenzwerten der Schwingungsbogen a und b den ersten Ausschlag berechnen lehrt, noch einer von a und b abhängigen Correction.

Wenn nach ν Inductionsstößen der Magnet bei seinem zweiten (von dem letzten Stosse an gezählten) Durchgange durch die Ruhelage die

Geschwindigkeit $v_{2\nu+1}$ besitzt, und in diesem Augenblicke durch einen neuen, seiner Bewegung entgegenwirkenden Inductionstoss die Geschwindigkeit v_0

erhält, so wird der folgende Ausschlagswinkel $\alpha_{2\nu+1}$ gemäss der Gleichung (28) bestimmt durch:

$$(29) \quad v_0 - v_{2\nu+1} = n \cdot \alpha_{2\nu+1} e^{\frac{m}{\beta} \arctan \frac{\beta}{m}} (1 - S_3 \alpha_{2\nu+1}^2).$$

Die dann ungestört durch die Ruhelage sich zurückbewegende Nadel möge bis zum Winkel $\alpha_{2\nu+2}$ ausschlagen, so ist:

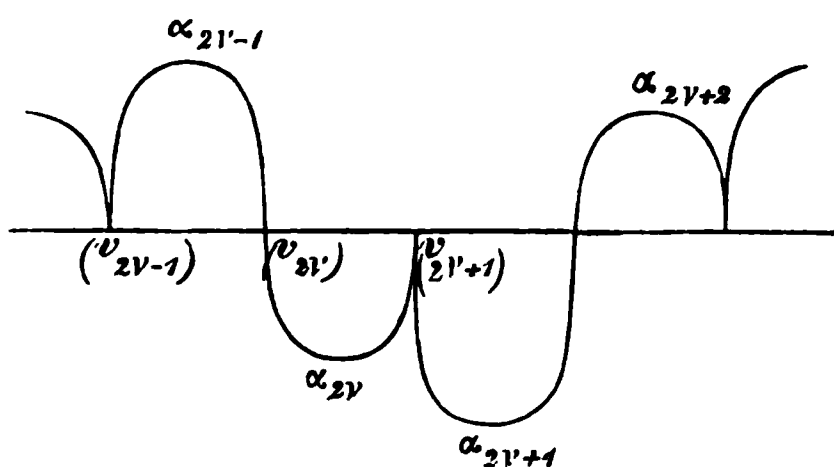
$$\alpha_{2\nu+2} = \alpha_{2\nu+1} \theta(\alpha_{2\nu+1}),$$

wenn $\theta(\alpha_{2\nu+1})$ das Dämpfungsverhältniss für den Winkel $\alpha_{2\nu+1}$ bedeutet. Durch eine der obigen analoge Gleichung sind v_0 und $v_{2\nu+1}$ bestimmt:

$$v_0 = n \alpha_1 e^{\frac{m}{\beta} \arctan \frac{\beta}{m}} (1 - S_3 \alpha_1^2),$$

$$v_{2\nu+1} = n \alpha_{2\nu} \theta(\alpha_{2\nu}) e^{\frac{m}{\beta} \arctan \frac{\beta}{m}} (1 - S_3 \alpha_{2\nu}^2 \theta(\alpha_{2\nu})^2).$$

Hier ist α_1 der erste, $\alpha_{2\nu}$ der vor $\alpha_{2\nu+1}$ vorhergehende Ausschlagswinkel, also $\alpha_{2\nu} \theta(\alpha_{2\nu})$ der auf $\alpha_{2\nu}$ folgende, wenn die Nadel ungestört geblieben wäre.



Die Einsetzung der beiden vorhergehenden Gleichungen und der folgenden:

$$\alpha_{2v} = \alpha_{2v-1} \theta(\alpha_{2v-1})$$

in (29) ergibt:

$$\begin{aligned} \alpha_1 (1 - S_3 \alpha_1^2) - \alpha_{2v-1} \theta(\alpha_{2v}) \theta(\alpha_{2v-1}) \{1 - S_3 \alpha_{2v-1}^2 \theta(\alpha_{2v})^2 \theta(\alpha_{2v-1})^2\} \\ = \alpha_{2v+1} (1 - S_3 \alpha_{2v+1}^2). \end{aligned}$$

Sind nun nach einer genügenden Anzahl von Inductionstößen die Ausschläge constant geworden, also:

$$\alpha_{2v+1} = \alpha_{2v-1} = \frac{a}{2}, \quad \alpha_{2v+2} = \alpha_{2v} = \frac{b}{2},$$

so wird:

$$\theta(\alpha_{2v+1}) = \theta(\alpha_{2v-1}) = \frac{b}{a} = \theta\left(\frac{a}{2}\right)$$

und aus der vorhergehenden Gleichung:

$$2\alpha_1(1 - S_3 \alpha_1^2) = a \left\{ 1 - S_3 \frac{a^2}{4} + \theta\left(\frac{b}{2}\right) \theta\left(\frac{a}{2}\right) \left(1 - S_3 \frac{a^2}{4} \theta\left(\frac{b}{2}\right)^2 \theta\left(\frac{a}{2}\right)^2\right) \right\}.$$

Nun ist nach Gleichung (24):

$$\lambda = \log \operatorname{nat} \frac{a}{b} = \frac{m\pi}{\beta} \left(1 - S_2 \frac{a^2}{4}\right)$$

und daher mit Vernachlässigung der höheren Potenzen:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{\theta\left(\frac{a}{2}\right)} = e^{\frac{m\pi}{\beta}} \left(1 - \frac{m\pi}{\beta} S_2 \frac{a^2}{4}\right)$$

und analog:

$$\frac{1}{\theta\left(\frac{b}{2}\right)} = e^{\frac{m\pi}{\beta}} \left(1 - \frac{m\pi}{\beta} S_2 \frac{b^2}{4}\right)$$

oder nach Einsetzung des Werthes von: $e^{\frac{m\pi}{\beta}}$ aus der vorigen Gleichung:

$$\frac{1}{\theta\left(\frac{b}{2}\right)} = \frac{a}{b} \left(1 + \frac{m\pi}{\beta} S_2 \frac{a^2 - b^2}{4}\right).$$

Hiernach erhält die Formel für α_1 die Gestalt:

$$\begin{aligned} 2\alpha_1(1 - S_3 \alpha_1^2) = a \left(1 - S_3 \frac{a^2}{4}\right) \\ + a \frac{b^2}{a^2} \left(1 - \frac{m\pi}{\beta} S_2 \frac{a^2 - b^2}{4}\right) \left(1 - S_3 \frac{a^2}{4} \frac{b^4}{a^4} \left\{1 - \frac{m\pi}{\beta} S_2 \frac{a^2 - b^2}{4}\right\}^2\right) \end{aligned}$$

oder mit Vernachlässigung der Glieder von der Ordnung a^4 oder $a^2 b^2$:

$$(30) \quad 2\alpha_1 (1 - S_3 \alpha_1^2) = a \left\{ 1 + \frac{b^2}{a^2} \left(1 - \mathcal{A} \frac{a^2 - b^2}{4} S_2 - \frac{b^2}{4} S_3 \right) - \frac{a^2}{4} S_3 \right\},$$

nachdem: $\frac{m\pi}{\beta} = \mathcal{A}$

gleich dem Decremente für unendlich kleine Bogen eingesetzt ist.

Die Formel (30) tritt also an die Stelle der sonst bei der Zurückwerfungsmethode angewandten:

$$2\alpha_1 = a \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right).$$

Die analoge, bei der Multiplicationsmethode anzuwendende genaue Formel lautet, wenn a den Grenzwert des Schwingungsbogen bezeichnet:

$$2\alpha_1 (1 - S_3 \alpha_1^2) = a \left\{ 1 - e^{-\mathcal{A}} - \frac{a^2}{4} \left(\mathcal{A} e^{-\mathcal{A}} S_2 - (e^{-3\mathcal{A}} - 1) S_3 \right) \right\}.$$

In diese beiden Formeln kann für α_1 in $S_3 \alpha_1^2$ der genäherte Werth, für welchen S_1, S_2, S_3 Null sind, eingesetzt werden.

Sind nun v_1 resp. v_2 die bei der Induction um die horizontale resp. verticale Componente des Erdmagnetismus, dem Magneten ertheilten Anfangsgeschwindigkeiten und a_1 resp. a_2 die ersten Ausschlagswinkel, so ist:

$$v_1 = n a_1 e^{\frac{m}{\beta} \arctan \frac{\beta}{m}} (1 - S_3 a_1^2), \quad v_2 = n a_2 e^{\frac{m}{\beta} \arctan \frac{\beta}{m}} (1 - S_3 a_2^2),$$

andererseits ist bekanntlich:

$$v_1 = \frac{2F}{KW} \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=0} \cdot T; \quad v_2 = \frac{2F}{KW} \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=0} \cdot V,$$

wenn T die horizontale, V die verticale Componente der erdmagnetischen Kraft bedeutet, F die Fläche des Erdinductors. Daraus folgt:

$$(31) \quad \frac{V}{T} = \tan i = \frac{a_2}{a_1} \frac{1 - S_3 a_2^2}{1 - S_3 a_1^2},$$

worin i die magnetische Inclination bezeichnet. Da nun $S_3 a_2^2 \geq S_3 a_1^2$ ist, je nachdem $V \geq T$, so ersieht man, dass die Inclination ohne diese Correctionsgrößen zu gross resp. zu klein gefunden wird, wenn i grösser resp. kleiner als 45° ist.

wo a , A als Argumente zu λ hinzugefügt sind, ergibt sich mit Hülfe der Gleichungen:

$$\lambda(a) = \mathcal{A}(1 - S_2 a^2); \quad \lambda(A) = \mathcal{A}(1 - S_2 A^2),$$

das Decrement \mathcal{A} für unendlich kleine Bogen:

$$\mathcal{A} \log e = 0,25231.$$

Die Correctionsgrösse S_2 aus diesen Beobachtungen zu berechnen, erscheint nicht zweckmässig, da hier der Einfluss der Beobachtungsfehler zu gross ist. Da aber M_1 für den Multiplicator II uns jetzt bekannt ist, so ergeben uns die Gleichungen auf p. 472 nach Einsetzen von \mathcal{A} die Werthe:

$$S_2 = 3,5848, \quad S_3 = 1,1543,$$

und es wird aus der Formel (32):

$$\operatorname{tg} i = \frac{\mathcal{A}}{a} \frac{1 + \frac{B^2}{A^2}}{1 + \frac{b^2}{a^2}} (1 - 0,000\,3841 - 0,000\,0984 - 0,001\,2958),$$

$$i = 66^\circ 37' 23''.$$

Wendet man dagegen die gebräuchliche Formel an:

$$\operatorname{tg} i' = \frac{\mathcal{A}}{a} \frac{1 + \frac{B^2}{A^2}}{1 + \frac{b^2}{a^2}}, \quad \text{so folgt: } i' = 66^\circ 39' 36''.$$

Die Correction beträgt also hier:

$$i - i' = -2' 13''.$$

Die Grösse:

$$1 - \frac{S_3}{4} (A^2 - a^2) = 1 - 0,001\,2958$$

ist die Correctionsgrösse der Formel (31), wenn die Differenzen $(a_2 - A)$, $(a_1 - a)$ vernachlässigt werden (sie betragen infolge der starken Dämpfung nur ungefähr 50 Scalentheile). Jene Correctionsgrösse hat einen Werth von $1' 37''$.

Aus Gleichung (32) ist ferner noch ersichtlich, dass in derselben zu dem Quotienten $\frac{A}{a}$ eine positive und eine negative Grösse hinzugefügt wird; es kann also der Fall eintreten, dass dieselben Null sind und:

$$\operatorname{tg} i'' = \frac{A}{a}$$

1.

2

DER PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND IX.

I. *Ueber die Fortführung der Electricität durch strömendes Wasser in Röhren und verwandte Erscheinungen; von E. Dorn in Breslau.*

Inhalt: 1. Apparate. — 2. Röhren. — 3.—10. Electrometerversuche: 3. Anordnung der Versuche. — 4. Abhängigkeit der electromotorischen Kraft vom Druck. — 5. Behandlung der Röhren. — 6. Abhängigkeit der electromotorischen Kraft vom Querschnitt für Capillaren. — 7. Discussion der Formel für das „electrische Moment“. — 8. Methode zur Bestimmung des specifischen Widerstandes des Wassers. — 9. Bestimmung des electrischen Momentes für Wasser und Glas. — 10. Verhalten nicht capillarer Röhren. — 11.—20. Galvanometerversuche: 11. Das electrische Moment für Wasser und Glas aus Galvanometerversuchen hergeleitet. — 12. Methode zur Untersuchung der Abhängigkeit der electromotorischen Kraft vom Querschnitt für weitere Röhren. — 13. Reduction auf gleiche mittlere Geschwindigkeit des Wassers. — 14. Die electromotorische Kraft nahe dem Radius umgekehrt proportional. — 15. Vergleichung mit dem Resultate von Hrn. Edlund. — 16. Fehlerquellen bei Benutzung des Depolarisators. — 17. Schliessungsextrastrome. — 18. Experimentelle Prüfung der Theorie. — 19. Ladungserscheinungen. — 20. Discussion des Einflusses der Fehlerquellen. — 21. Erwiderung auf Bemerkungen von Hrn. Edlund. — 22. Spuren einer Gleitung von Wasser an Glaswänden. — 23. Electrisches Moment für Thon und Zinksulfatlösungen. — 24. Electrische Ströme durch Bewegung kleiner Theilchen durch Wasser. — 25. Starke Electricitätserregung, wenn Wasser mit Luft gemischt durch eine Glasröhre geht. — 26. Uebersicht der Resultate. — 27. Theoretische Erörterungen.

Vor schon mehr als 2 Jahren begann ich eine Reihe von Beobachtungen über die Fortführung von Electricität durch strömendes Wasser und verwandte Erscheinungen, und ich habe einen Theil der Resultate bereits mitgetheilt.¹⁾

1) Dorn, Wied. Ann. 5. p. 20 ff. 1878.

verwenden. Die Constanz ist zufriedenstellend; denn ein 3 Monate altes Element zeigte eine nur um 0,6 Proc. geringere electromotorische Kraft als ein anderes, bei dem so eben das Zink frisch amalgamirt und neue Zinkvitriollösung eingegossen war.

Ein solches einen Tag vorher gefülltes Element wurde • electrometrisch verglichen mit einem Normaldaniell¹⁾: Amalg. Zn in verdünnter H_2SO_4 vom spec. Gew. 1,06; concentrirte Lösung von CuSO_4 mit Cu (frisch galvanisch niedergeschlagen), und erhalten:

$$d = 0,9282 D$$

wo D das Normaldaniell ist.

Bei den galvanometrischen Versuchen wurde meistens ein Daniell der von Hrn. Beetz angegebenen Form benutzt; seine electromotorische Kraft war fast identisch mit d .

2. Bei den älteren Versuchen sind Röhren von Thüringer Glas verwendet, wie ich sie gerade zu kaufen bekam; die Dimensionen derselben sind schon angegeben.²⁾ Im Sommer 1878 erhielt ich ein Sortiment Röhren aus demselben Hafen gezogen von Hrn. Schilling in Gehlberg und lasse ihre Dimensionen folgen. Die Querschnitte sind auch hier nach der Coulomb'schen Methode bestimmt.

Röhre	Länge	Querschn.	Durchm.	Röhre	Länge	Querschn.	Durchm.
	mm	qmm	mm		mm	qmm	mm
21	100,97	0,68203	0,93186	St 4	199,4	0,1947	0,4979
22	150,92	3,9022	2,2290	St 5	196,3	0,1939	0,4968
22'	150,9	3,9372	2,2390	35	498,9	0,8524	1,0419
23	304,31	7,6605	3,1230	36	300,0	0,3462	0,6639
24	502,29	13,2866	4,1130	37	201,3	0,2221	0,5317
25	500,82	0,76835	0,98908	38	100,7	0,1499	0,4369
26	300,64	0,37867	0,69436	39	503,2	0,04990	0,2521
27	201,92	0,24206	0,55516	40	499,7	0,2301	0,5413
28	100,79	0,14029	0,42264	41	500,6	0,1653	0,4588
St 1 *)	201,5	0,1797	0,4784	42	300,2	0,05378	0,2617
St 2	201,1	0,1763	0,4737	43	138,15	0,05312	0,2601
St 3	200,7	0,1841	0,4842				

*) St 1, 2 . . . 5 waren Stücke einer Röhre.

1) Kohlrausch, Pogg. Ann. 141. p. 450. 1870.

2) Dorn, Wied. Ann. 5. p. 28. 1878.

unteres Ende mehrere Centimeter vom Boden des Ballons entfernt blieb. Eine Störung der Versuche durch eine Verstopfung der Röhre war also nicht zu erwarten, um aber hierüber volle Sicherheit zu erlangen, wurde bei jedem einzelnen Versuche das in einer gewissen Zeit ausfliessende Wasser aufgefangen und seine Menge mit einer Interpolationsformel, resp. graphischen Darstellung verglichen, welche aus vorgängigen¹⁾ bei verschiedenen Drucken angestellten Beobachtungen hergeleitet war.

Die zu untersuchende Röhre wurde mit Kork und Siegelack in zwei weitere Stücke eingekittet, welche in seitlichen Ansätzen die 12,5 qcm grossen Platinelectroden trugen, und durch einen weiten Gummischlauch mit Hanfeinlage am Ausflussrohre befestigt. Die Röhre hing dann frei herab; da das Wasser bei den Versuchen in Tropfen²⁾ austrat, so war die untere Electrode vollkommen isolirt (natürlich abgesehen von dem Wasser in der Röhre).

Um die an den Electroden befestigten Platindräthe wurden die dünnen zum Electrometer führenden Kupferdräthe (ohne Vermittelung eines Commutators) herumgewickelt, so dass auch hier jede Ableitung vermieden war.

Die obere Electrode, die ja durch eine Wassersäule von grossem Querschnitt mit dem Ballon communicirte, wurde stets mit dem zur Erde abgeleiteten Quadrantenpaar verbunden, die untere Electrode mit dem isolirten.

Bei der umgekehrten Anordnung durfte man nämlich nicht die volle Ausbildung der Potentialdifferenz erwarten, und in der That wurde bei einigen Vorversuchen die Ablenkung des Electrometers beobachtet:

1) In einzelnen Fällen wurden diese Beobachtungen später gemacht.

2) Infolge hiervon könnte der Apparat zugleich als „Water dropping collector“ wirken, besonders wenn ein Becherglas untergesetzt wird, das durch das Austrocknen electrisch geworden ist. Ich habe mich aber von der gänzlichen Unerheblichkeit dieser möglichen Fehlerquelle überzeugt.

weite Röhren die Proportionalität der electromotorischen Kraft und des Druckes nachgewiesen, doch schien es mir von Interesse, durch besonders sorgfältige Versuche zu entscheiden, bis zu welcher Grenze der Genauigkeit dies Gesetz verbürgt werden kann.

Um die Resultate möglichst unbeeinflusst von der Aenderung der electromotorischen Kraft mit der Zeit zu erhalten, wurden die Versuche so angeordnet, dass zwischen je zwei successiven Beobachtungen nur etwa 2 Minuten verflossen, und dass keine Unterbrechung im Strömen des Wassers eintrat. Das Electrometer war schwach geladen, zur Prüfung desselben wurde aus 2 Bunsen'schen Elementen (Widerstand beider 0,2 Siemens) und 5000 Siemens'schen Einheiten ein Stromkreis gebildet und die Potentialdifferenz zwischen dem zur Erde abgeleiteten negativen Pole und den Stellen 1000, 2000, 3000, 5000 gemessen. Da die Abweichung von der Proportionalität im Mittel nur $\frac{1}{5}$ Proc. betrug, so konnte sie vernachlässigt werden.

Vor den eigentlichen Beobachtungen liess ich das Wasser einige Minuten durch die Röhre fliessen. Es wurde beobachtet:

30. Aug. 1879. Röhre 41, seit 24 Stunden benetzt. $d=57,0$.

p	A	E	E_{1000}		Diff.
316,4	48,5	0,851	2,688		
953,5	138,1	2,423	2,541	2,639	0,098
304,1	44,9	0,788	2,590		= 3,7 Proc.

Röhre 43, frisch gereinigt ¹⁾,

486,8	84,0	1,474	3,028		
957,5	161,2	2,829	2,955	2,986	0,031
470,1	78,9	1,384	2,944		= 1,0 Proc.

31. Aug. 1879. Röhre 43, seit 24 Stunden benetzt. $d=38,0$.

p	A	E	E_{1000}		Diff.
425	50,5	1,329	3,127		
972	109,0	2,868	2,937	3,089	0,152
434	50,3	1,324	3,050		= 4,9 Proc.

1) S. u. p. 524.

Soweit die starke Aenderung der electromotorischen Kraft mit der Zeit erkennen lässt, findet auch hier angenäherte Proportionalität (bis auf 3 bis 5 Proc.) mit dem Drucke statt. Bei den drei letzten Röhren wächst die electromotorische Kraft etwas langsamer, bei 25 etwas schneller als der Druck. Dies abweichende Verhalten, welches auch bei einem andern Versuche hervortrat, hängt wahrscheinlich damit zusammen, dass die Röhre 25 auch in der Beziehung zwischen Druck und Ausflussmenge in der Nähe von 600 mm eine Discontinuität zeigte.

Da bei den eigentlichen Messungen der Druck nur zwischen 800 und 1000 mm variirte, so darf nach dem Vorstehenden zur Reduction derselben jedenfalls die electromotorische Kraft dem Drucke proportional gesetzt werden.¹⁾

5. Nachdem zuerst Hr. Clark²⁾ auf die Aenderung der electromotorischen Kraft mit der Zeit und die Abhängigkeit derselben von der Behandlung der Röhre aufmerksam gemacht hatte, musste mein Bemühen sein, ein Verfahren aufzusuchen, welches constante Resultate liefert.

Merkwürdiger Weise zeigte sich das Reinigungsverfahren von Hrn. Clark — Erhitzen mit concentrirter Schwefelsäure unter Zusatz einiger Tropfen Salpetersäure im Dampfbade, Hindurchsaugen von heissem destillirtem Wasser und warmer Luft mit Hülfe einer Luftpumpe — für die Glassorte meiner Röhren ungeeignet.

Es trat nämlich im Laufe der ersten 10—12 Minuten eine Steigerung der electromotorischen Kraft mehrmals bis auf das Doppelte, ja Dreifache des anfänglichen Werthes ein, gleichgültig ob das destillirte Wasser in einer Porcellan- oder Silberschale erwärmt war. Eine Versuchsreihe vom 9. 4. 79 machte mich hierauf aufmerksam; am folgenden Tage erhielt ich:

1) Diese Proportionalität ist hiermit zunächst immer nur für denselben Apparat behauptet.

2) Clark, Wied. Ann. 2. p. 344. 1877.

flasche¹⁾ mit kochendem Wasser, Hindurchsaugen trockener Luft.

In beiden Fällen erfolgte eine langsame Abnahme der electromotorischen Kraft. Bei den Stücken 1 bis 5, welche von derselben Röhre geschnitten waren, wurde mit Wasser von derselben Füllung des Ballons beobachtet:

Röhre	Frisch		Gereinigt	
	Datum	E_{1000}	Datum	E_{1000}
St. 1	16. 4. 79	3,282	16. 4. 79	2,919
—	—	—	17. 4. 79	2,985
—	—	—	18. 4. 79	3,151
St. 2	17. 4. 79	3,058	17. 4. 79	2,899
St. 3	18. 4. 79	3,254	18. 4. 79	3,127
St. 4	22. 4. 79	3,301	—	—
St. 5	23. 4. 79	3,132	23. 4. 79	3,107
		Mittel 3,205		
		± 0,088		
			Mittel 3,031	
			± 0,097	

Die mittlere Abweichung beträgt etwa 3 Proc., was für Versuche wie die vorliegenden eine gute Uebereinstimmung genannt werden darf. Auch in den späteren Beobachtungen findet man die Brauchbarkeit des Reinigungsverfahrens bestätigt. Uebrigens sinkt durch die Reinigung die electromotorische Kraft etwa um 5 Proc., während nach Anwendung des Verfahrens von Hrn. Clark auch der nach langem Strömen erreichte Werth noch um 20 Proc. gegen den für die frische Röhre zurückbleibt.

6. Nach den in 4) und 5) beschriebenen nothwendigen Vorbereitungen untersuchte ich die Abhängigkeit der electromotorischen Kraft vom Querschnitt für Röhren, die dem Poiseuille'schen Gesetze genügen und solche, die sich nicht zu weit von demselben entfernen.

Die sämtlichen folgenden Versuche sind mit destillirtem Wasser von derselben Füllung des Ballons wie die oben mitgetheilten angestellt.

1) Ausser bei der sehr langen und engen Röhre 39 gelang dies ausreichend. -

unerheblich herabgesetzt. Eine Ausnahme machen hier 38 und 28, welches Theile derselben Glasröhre waren.

7. Hr. Helmholtz giebt a. a. O.¹⁾ die Formel:

$$(11b) \quad \frac{A}{\sigma} = \frac{P}{4 \pi k^2} (\varphi_i - \varphi_a)$$

wo:

A die durch den Wasserstrom erzeugte electromotorische Kraft,

σ den specifischen Widerstand der Flüssigkeit, beides in electrostatischem Maasse,

P die Druckdifferenz an den Enden der Röhre in absolutem Maasse,

k^2 die Reibungsconstante der Flüssigkeit,

$\varphi_i - \varphi_a$ das „electrische Moment“ der Doppelschicht nach Hrn. Helmholtz

bedeutet.

Obige Formel gilt unter der Bedingung, dass eine Gleitung der Flüssigkeit an der Röhrenwand nicht stattfindet; man überzeugt sich leicht, dass im entgegengesetzten Falle für einen kreisförmigen Querschnitt $\varphi_i - \varphi_a$ nur durch $\varphi_i - \varphi_a + l \frac{\partial \varphi}{\partial N}$ zu ersetzen ist, wo l die Gleitungsconstante, N die Normale der Röhrenwand bedeutet.²⁾

1) Helmholtz, Wied. Ann. 7. p. 370. 1879.

2) Es sei die Geschwindigkeit an der Wand \bar{u} , so wird sie in der sehr kleinen Entfernung N gesetzt werden können $\bar{u} + \frac{\partial u}{\partial N} N$, sodass, wenn s die electriche Dichtigkeit bedeutet, durch ein Flächenelement ds und N des Querschnittes in der Zeiteinheit die Electricitätsmenge geführt wird:

$$s \left(\bar{u} + \frac{\partial u}{\partial N} N \right) ds dN,$$

welcher Ausdruck über den Querschnitt zu integriren ist.

Der vom zweiten Term herrührende Theil des Integrales wird nach Hrn. Helmholtz:

$$- \frac{P Q}{4 \pi k^2 L} (\varphi_i - \varphi_a)$$

(L = Länge, Q = Querschnitt der Röhre).

Drückt man A in Daniell'schen Elementen, die Grössen k^2 , P , σ in absolutem Maasse aus, so erhält man $\varphi_i - \varphi_a + l \frac{d\varphi}{dN} = \mu$ aus der Formel (11b') ebenfalls in Daniells.

Alle Versuche sind bereits auf einen Druck von 1000 mm Quecksilber umgerechnet; dieser ist in absolutem Maasse

$$P_{1000} = 1000 \cdot g \cdot q,$$

worin für g die Beschleunigung der Schwere am Beobachtungsorte 9811,29, für q die Dichtigkeit des Quecksilbers

sodass nur noch zu berechnen bleibt:

$$\int s \bar{u} ds dN.$$

Für einen kreisförmigen Querschnitt hat \bar{u} den von s unabhängigen Werth: $\bar{u} = -\frac{lPR}{2Lk^2}$, ferner ist:

$$s = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial N^2}.$$

Integriert man zuerst nach N , so wird

$$\int \frac{\partial^2 \varphi}{\partial N^2} dN = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial N}\right)_{N=0} = 0,$$

indem bei der geringen Dicke der electrischen Doppelschicht φ für merkliche Werthe von N constant wird, sodass $\frac{\partial \varphi}{\partial N}$ für die obere Grenze verschwindet.

Da die Integration nach s einfach $2\pi R$ gibt, so wird das Integral:

$$\int s \bar{u} ds dN = \frac{\bar{u}R}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial N}\right)_{N=0} = -\frac{PQ}{4\pi Lk^2} l \left(\frac{\partial \varphi}{\partial N}\right)_{N=0},$$

sodass der Gesamtbetrag der in der Zeiteinheit durch den Querschnitt geführten Electricitätsmenge wird:

$$E_0 = -\frac{PQ}{4\pi k^2 L} \left(\varphi_i - \varphi_a + l \frac{\partial \varphi}{\partial N}\right), \text{ wo der Index bei } \frac{\partial \varphi}{\partial N} \text{ fortgelassen ist.}$$

Wirkt ausserdem eine electromotorische Kraft A zwischen den Enden der Röhre, so ist die von dem electrischen Strom durch jeden Querschnitt beförderte Electricitätsmenge für die Zeiteinheit:

$$E_1 = \frac{AQ}{\sigma L}$$

Ist keine andere Leitung, als die durch das Rohr vorhanden, so wird der Zustand stationär, wenn:

$$\begin{aligned} E_0 + E_1 &= 0, \\ \frac{A}{\sigma} &= \frac{P}{4\pi k^2} \left(\varphi_i - \varphi_a + l \frac{\partial \varphi}{\partial N}\right). \end{aligned}$$

bei der Temperatur der Beobachtung zu setzen ist. Da letztere fast genau 21° war, wird $q = 13,544$ und

$$P_{1000} = 1,3299 \cdot 10^8.$$

Um die von mir benutzte Bezeichnung einzuführen, ersetze ich A durch E_{1000} und habe:

$$(11b^1) \quad \mu = \varphi_i - \varphi_a + l \frac{d\varphi}{dN} = \frac{4\pi k^2 E_{1000}}{P_{1000} \cdot \sigma};$$

k^2 ist nach Hrn. O. E. Meyer¹⁾, hier auf Millimeter bezogen, für die Temperatur T :

$$k^2 = \frac{1,775}{1 + 0,03315 T + 0,0002437 T^2}.$$

Der specifische Widerstand σ ist der Widerstand eines Würfels von 1 mm Seite aus der zu untersuchenden Substanz, gemessen in electrostatischem Maasse. Die Messungen ergeben im Folgenden denselben zunächst bezogen auf Quecksilber = 1, d. h. es ist zu Grunde gelegt ein Widerstand = 0,001 Siemens. Nach Hrn. H. F. Weber²⁾ ist nun

1 Siemens = $0,9550 \cdot 10^{10}$ absolute electromagnetische Widerstandseinheiten, somit

$$1 \text{ Siemens} = \frac{0,9950 \cdot 10^{10}}{v^2} \text{ electrostatische W.-E.}$$

v findet W. Thomson³⁾ $28,25 \cdot 10^{10}$, Maxwell⁴⁾ $28,798 \cdot 10^{10}$, wobei beide die British Association Unity = 10^{10} absoluten W.-E. voraussetzen. Da nun aber 1 Siemens = 0,9536 B.A.U., so hat man diese Zahlen mit $\frac{0,9550}{0,9536}$ zu multipliciren, um sie auf die Bestimmung von Hrn. H. F. Weber zu reduciren. Ich setze demnach $v = 28,565 \cdot 10^{10}$, indem ich das Mittel nehme, woraus dann folgt:

$$1 \text{ Siemens} = 1,1704 \cdot 10^{-13} \text{ electrostatische W.-E.}$$

Den auf Quecksilber bezogenen specifischen Widerstand hat man also mit $1,1704 \cdot 10^{-16}$ zu multipliciren, um denselben in electrostatischem Maasse zu erhalten.

1) O. E. Meyer, Wied. Ann. 2. p. 394. 1877.

2) H. F. Weber, Phil. Mag. Januar 1878.

3) W. Thomson, Rep. Brit. Assoc. p. 436. 1869.

4) Maxwell, ebenda p. 438. Ich ziehe diese Messungen denen von Weber und Kohlrausch vor.

sämmtliche nach I erhaltenen Widerstände um 1,52 Proc. verringert.

9. Das Wasser, mit dem die electromotorische Kraft im April 1879 bestimmt wurde, war zu gleichen Theilen 2 Ballons entnommen, von deren Inhalt im August noch der grösste Theil unvermischt übrig war. Am 8. August 1879 erhielt ich für diese:

$$\sigma = 6,280 \cdot 10^{-8}, \text{ resp. } 9,680 \cdot 10^{-8}.$$

Schätzt man für die Beobachtungen vom 23. April 1879 den Widerstand dem Mittel gleich: $7,980 \cdot 10^{-8}$, so ergeben nach (11b') die Röhren 40, 41, 42¹⁾ frisch für $\varphi_i - \varphi_a + l \frac{\partial \varphi}{\partial N}$ 3,750, gereinigt 3,600.

Da dieser Werth nur als eine vorläufige Näherung angesehen werden konnte, machte ich zur Ermittlung von $\varphi_i - \varphi_a + l \frac{\partial \varphi}{\partial N}$ noch neue Beobachtungen mit 2 Sorten von Wasser, wo stets sofort nach Messung der electromotorischen Kraft eine Bestimmung des Widerstandes folgte.

In nachstehender Tabelle sind alle Widerstandsmessungen vereinigt.

Dat.	Temp.	δ	$\omega \cdot 10^{-8}$	A	$W \cdot 10^{-6}$	$\sigma \cdot 10^8$	$\frac{1}{\tau} \cdot 10^9$
14. 8. 79. *)	21,00	2,111	2,371	101,80	1,0995	4,653	2,515
14/8. 79. **)	21,10	2,084	2,483	107,62	1,1030	4,668	2,507
15/8. 79.	21,26	2,091	2,367	101,85	1,1073	4,685	2,498
21/8. 79.	20,86	2,080	2,445	103,42	1,1323	4,791	2,443
23/8. 79.	21,12	2,085	2,413	100,96	1,1425	4,834	2,421
24/8. 79.	21,21	2,101	2,410	100,76	1,1345	4,801	2,438
27/8. 79.	21,17	2,073	2,415	60,57	1,9195	8,123	1,441
28/8. 79.	20,92	2,062	2,408	60,36	1,9150	8,104	1,444

*) Vormittags. **) Nachmittags.

Die Ablenkungen A sind schon wegen der Nebenschliessung durch den Fuss des Depolarisators corrigirt, ebenso ist bei W bereits der Widerstand ausser der Röhre (4000 S.-E.) in Abzug gebracht. Die letzte Columne enthält die Leitungsfähigkeit auf Quecksilber bezogen. Zur

1) S. oben p. 526.

denen:

$$\frac{0,9360 \cdot 11,71 \cdot 28,565 \cdot 10^{10}}{1,377 \cdot 10^9} = 2274 \text{ electrost. Einh. entsprechen.}$$

Der Querschnitt von 41 ist 0,1653 qmm; für einen Druck von 994 wurde in 1 Sec. das Ausflussvolumen beobachtet 289,1 cmm, woraus $u = 1749$ und auf den bei der eigentlichen Beobachtung herrschenden Druck von 993 mm reducirt $= 1747$ mm/Secunde sich ergibt.

Die Leitung von den Electroden zu den in Ebonit eingelassenen Klemmschrauben des Galvanometers wurde nur über Siegellackstützen geführt, sodass eine Störung durch Nebenschliessungen und fremde electromotorische Kräfte ausgeschlossen war. Die Ablenkungen von dem Stande für ruhendes Wasser aus gerechnet, waren nach Oeffnung des Hahnes:

$$3,1 \quad 3,0 \quad 2,75 \quad 2,6 \text{ mm}^1),$$

woraus die Werthe von $\varphi_i - \varphi_a + l \frac{\partial \varphi}{\partial N}$ folgen:

$$\begin{array}{cccc} 2,02 & 1,95 & 1,79 & 1,69 \text{ electrostat. Einh.} \\ = 5,15 & 4,99 & 4,57 & 4,32 \text{ Daniell.} \end{array}$$

Die Ablenkung durch 2 Meidinger, die mit Galvanometer und Röhre zu einem Stromkreise verbunden waren, betrug 2,28 mm; wie später gezeigt werden wird, lässt sich mit Benutzung hiervon die früher mit E_{1000} bezeichnete electromotorische Kraft und weiter aus dieser $\varphi_i - \varphi_a + l \frac{\partial \varphi}{\partial N}$ nach (11b') berechnen. Ich erhielt so:

$$4,95 \quad 4,79 \quad 4,39 \quad 4,15 \text{ Daniell.}$$

Man erkennt bei näherer Betrachtung, dass zu einer vollen Uebereinstimmung der nach (11b') und (14d') berechneten Resultate die strenge Erfüllung des Poiseuille'schen Gesetzes und die Richtigkeit des benutzten Werthes von σ erfordert wird.

Da sich später zeigen wird, dass die Nichterfüllung des Poiseuille'schen Gesetzes ein sehr starkes Anwachsen

1) Eine Correction wegen der Polarisation ist hier nicht erforderlich.

13. Da es mir nicht gelang, eine einfache Beziehung zwischen der Ausflussgeschwindigkeit und der Stromstärke (resp. electromot. Kraft) aufzufinden, so schlug ich zur Reduction aller Beobachtungen auf eine bestimmte Geschwindigkeit ($u = 8$ m/Secunde) einen indirecten Weg ein. Ich beobachtete für mehrere Drucke die Ausflussmenge, welche durch den Querschnitt dividirt die Geschwindigkeit ergibt, berechnete hiernach eine Interpolationsformel:

$$p = xu + yu^2,$$

welche den zu $u = 8$ m/Secunde gehörigen Druck p_8 zu bestimmen erlaubte, und reducirte die bei anderen Drucken erhaltenen electromotorischen Kräfte auf p_8 unter der Annahme der Proportionalität.

Auf die Bedenken, welche Hr. Edlund gegen die letztere Voraussetzung erhebt¹⁾, komme ich später zurück; innerhalb des hier erforderlichen Bereiches habe ich die Proportionalität von Druck und electromotorischer Kraft bis auf Bruchtheile eines Procentes nachgewiesen.²⁾

Bei den Beobachtungen der Ausflussmenge wurde der Hahn geöffnet, das Auffangegefäß mit einem Secundenschlage untergeschoben und wieder vorgezogen, und dann erst der Hahn geschlossen, wodurch man nur mit der stationären Strömung operirt und die Unregelmässigkeiten derselben beim Oeffnen und Schliessen des Hahnes vermeidet.

Für die Röhren 1 bis 16 wurden die Constanten x und y nach der Methode der kleinsten Quadrate aus 5

Polarisation schwäche den Strom im Verhältnisse $1 : 1 - f$, so wird, wenn einer electrostatischen Stromeinheit γ Scalentheile entsprechen, die Ablenkung sein:

$$A = e_0 (1 - f) \gamma.$$

Die Ablenkung durch ein Daniell wird:

$$i_2 = \frac{A Q (1 - f) \gamma}{\sigma L}, \quad \text{woher:} \quad \frac{A}{i_2} = \frac{e_0 \sigma L}{Q A} \text{ Daniell}$$

mit dem Obigen übereinstimmend.

1) Edlund, Wied. Ann. 8. p. 121. 1879.

2) Dorn, Wied. Ann. 5. p. 34 u. 35. 1878.

c. Drittens glaubt Péclet¹⁾ bewiesen zu haben, dass bei Erhöhung der Temperatur der electrische Unterschied Zink-Gold gleich gross bleibt.

Ich werde im Folgenden diese Schwierigkeiten zu heben suchen.

2. Was den ersten Punkt betrifft, so bemerkt Wiedemann²⁾:

„Bei den verhältnissmässig sehr geringen Temperaturdifferenzen (0,22 C.), welche bei den Thomson'schen Versuchen unter Anwendung sehr starker Ströme (es kam vor, dass die Löthung schmolz) beobachtet wurden, ist es stets noch fraglich, ob nicht secundäre Ursachen die Verschiedenheiten bedingt haben.“

Ich habe die Versuche Thomson's³⁾ in folgender Weise modificirt (Taf. IIIB. Fig. 4).

Aus später zu erörternden Gründen wählte ich einen Neusilberdraht von ungefähr 2 mm Dicke und $1\frac{3}{4}$ m Länge. Dieser Draht *ADEF* wurde in einer Länge von $\frac{3}{4}$ m horizontal befestigt und bog sich bei *D* und *E* um, sodass die Enden *A* und *F* in zwei nebeneinander stehende Gläser mit kaltem Wasser tauchten. In diesen Gläsern waren mit dem Neusilberdraht die kupfernen Leitungsdrähte verbunden, welche nach dem Commutator *C*, der Tangentenbussole *T* und der Batterie *B* führten. Auf dem horizontalen Theile *ED* befanden sich 4 Schirmchen *a*, *b*, *c*, *d*; zwischen *b* und *c* fiel auf den Draht aus dem Hahn *k* ein fortwährender Wasserstrom, jenseits *a* und *d* wurde der Draht erwärmt durch die beiden Gasflammen *e* und *f*, deren Stärke regulirt werden konnte. Zwischen *c* und *d* und zwischen *a* und *b* waren mit Seide fest auf den Draht gebunden die Löthstellen *g* und *h* eines Thermoelementes Kupfer-Eisen, dessen Pole mit dem Spiegelgalvanometer *G* verbunden waren.

1) Péclet, Ann. de chim. et de phys. 3. T. 20. p. 235.

2) Wiedemann, Galvanismus, 1. p. 644.

3) Wiedemann, Galvanismus, 1. p. 642.

Edlund¹⁾ schreibt den Unterschied zwischen beiden Reihen den Gasen zu, die sich auf den Metallplatten condensiren.

Clausius führt diese Erklärung ebenfalls an, hält es aber auch für möglich, dass beide electriche Erscheinungen unabhängig voneinander und gleichzeitig auftreten können.

Wo ein derartiger Unterschied besteht, glaubt man schon leicht an Irrthümer und Fehler. Durch Untersuchung ergibt sich nun, dass die thermo-electrische Reihe so genau von Matthiessen, Edlund und Tait bestimmt ist, dass darin unmöglich erhebliche Fehler vorkommen können. Anders verhält es sich mit der Spannungsreihe.

Wiedemann²⁾ führt darüber die Versuche von Volta, Seebeck, Péclet, Mund und Pfaff an. Hiervon sind die von Volta, Mund und Pfaff auf die gewöhnliche Weise durch Ableitung mit den Fingern ausgeführt. Diese verdienen daher kein Vertrauen, da Péclet³⁾ behauptet, dass diese Ableitung andere Resultate ergibt, wie beim alleinigen Gebrauch von Metallcontacten.

Seebeck gibt durchaus nicht an, wie er zu seiner Reihe gelangt, und Péclet sagt von der seinigen, dass er für die Richtigkeit nicht einstehen könne und seine Versuche zu wiederholen gedenkt⁴⁾.

Die einzigen zuverlässigen Resultate geben also die Versuche von Kohlrausch⁵⁾ und Avenarius⁶⁾, aber diese umfassen nur die sechs Metalle: Zink, Eisen, Kupfer, Silber, Platin und Gold, geben also keinen Aufschluss über Wismuth und Antimon.

Ich habe gesucht, hierüber Gewissheit zu erlangen.

Unter einer Glasglocke *A* (Taf. IIIB Fig. 6), die oben

1) Edlund, Pogg. Ann. 143. p. 404 1871.

2) Wiedemann, Galvanismus, I. p. 26.

3) Péclet, Ann. de chim. et phys. (3) 20. p. 238. 1841.

4) Péclet, Ann. chim. et phys. (3) 20. p. 243. 1841.

5) Kohlrausch, Pogg. Ann. 79. p. 177. 1850.

6) Avenarius, Pogg. Ann. 122. p. 193. 1864.

Erwärmung der nach § 3 vorübergehend in Wismuth erweckte Thermostrom 1,5 mal so stark war, als der Strom des Kupfer-Eisen-Elementes.

Beide Versuche zusammen lassen keinen Zweifel über den grossen Einfluss, den die durch Temperaturunterschiede erzeugten Structurdifferenzen ausüben können.

5. Es besteht nur noch eine Schwierigkeit, nämlich der Versuch Péclet's mit einer Zinkröhre, welche erst mit kaltem, später mit warmem Wasser gefüllt, in beiden Fällen gerade dieselbe electriche Ladung dem Condensator mittheilte. Nach Clausius muss aber die electriche Differenz zwischen zwei Metallen proportional der absoluten Temperatur zunehmen.

Ich habe deshalb den Versuch von § 4 mit Wismuth bei zwei verschiedenen Temperaturen des Zimmers wiederholt. Das Resultat ist folgendes:

Ausschlag des Electrometers:

bei 18° C.	7,	6,5,	4,5,	5,	6,5,	Mittel 5,9
„ 30° C.	9,5,	10,	10,5,	8,5,	9,0,	Mittel 9,5
„ 18° C.	7,5,	6,	5,5,	6,0,	7,	Mittel 6,4.

Auch mit Zink erhielt ich ähnliche Resultate, sodass ohne Zweifel die electriche Differenzen mit der Temperatur zunehmen.

6. Man kann nun wohl schliessen, dass die Potentialdifferenzen, die bei Erwärmung auftreten, nur Modificationen von denen sind, welche die von Volta entdeckten Erscheinungen zu Wege bringen.

Da Clausius gezeigt hat, dass eine richtige Erklärung der thermo-electrischen Erscheinungen nur gegeben werden kann, wenn man annimmt, dass beim Contact zweier Metallen durch die eigene Wärme der Lötstellen electriche Differenzen auftreten, so nehme ich für die Volta'schen electriche Differenzen denselben Ursprung an.

Wenn aber die Wärme im Contactpunkt zweier Metalle die constante electriche Differenz, welche sie zeigen, verursacht, warum hat denn dieselbe Wärme nicht auch

Diese letztere Thatsache ist also eine Folge des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie.

Dieser zweite Satz gilt aber nur, wie Thomson sagt: „If every part of the action and all its effects be perfectly reversible.“ So sagt auch Clausius: „Demnach gilt für alle umkehrbare Kreisprocesse als analytischer Ausdruck des zweiten Hauptsatzes die Gleichung:

$$\int \frac{dq}{T} = 0.$$

Nun hat der galvanische Strom wenigstens zwei Wirkungen, die das Auftreten eines umkehrbaren Kreisprocesses unmöglich machen, nämlich galvanische Erwärmung wegen des Widerstandes und chemische Zersetzung, wovon sicher die letztere, da sie die Art der Stoffe, welche die Kette bildet, ändert, in erster Stelle zu nennen ist.

Hieraus folgt, dass in einer Kette von Metallen und Flüssigkeiten, welche letztere nicht ohne Zersetzung leiten, bei constanter Temperatur allerdings ein Strom auftreten kann, weil Gleichung (3) dann nicht gilt.

7. Wenn alle Potentialdifferenzen beim Contact verschiedener Stoffe denselben thermischen Ursprung haben, müssen auch Metalle und Flüssigkeiten Thermoströme liefern können.

Wirklich sind solche Ströme von vielen beobachtet, aber man trug stets Bedenken, sie als wirkliche Thermoströme anzuerkennen.

Faraday¹⁾ schrieb sie einer Veränderung der chemischen Wirkung zu, weil er sie bei nicht chemisch aufeinander wirkenden Stoffen nicht bemerkte.

Obgleich man aber den Einfluss einer Aenderung in der chemischen Verwandtschaft und in der Concentration bei diesen Erscheinungen nicht verkennen kann, werden seit den vielen Versuchen Gore's²⁾ die Bedenken wohl grösstentheils geschwunden sein. Die Ströme zwischen

1) Faraday, Exp. Researches 1956.

2) Gore, Proc. Roy. Soc. 1871 und 1878.

und die Ablenkungen am Galvanometer in beiden Stellungen des Commutators i_1 und i_2 , so ist:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{i_1 + i_2}{i_1 - i_2}.$$

Nachdem nun die durch Ungleichheit der Platten entstehenden Ströme verschwunden waren, füllte man von jedem Troge die eine Abtheilung mit Eis und die andere mit warmem Wasser, und wenn dann die Thermometer in A und B dieselbe Temperatur zeigten, mass man schnell die Ablenkungen i_1 und i_2 . So fand ich bei einem Temperaturunterschiede von 28° C. :

1. Versuch	2. Versuch	3. Versuch	4. Versuch
$i_1 = 7,15$	6,9	7,0	7,2
$i_2 = 0,8$	0,9	0,8	0,75

also im Mittel:

$$\frac{E_1}{E_2} = 1,26.$$

Der Thermostrom $\text{Zn}|\text{ZnSO}_4$ ist bei gleichem Temperaturunterschiede 1,26 mal grösser als der von $\text{Cu}|\text{CuSO}_4$.

Wild¹⁾ fand bei 10° C. für

$\text{Zn}|\text{ZnSO}_4 \frac{1}{20} \text{ D.}$

und ich

$\text{Cu}|\text{CuSO}_4 \frac{1}{30} \text{ D.},$

wodurch obiges Resultat bestätigt wird.

Jetzt wurden beide Gefässe mit einer Batterie von 5 Bunsen'schen Elementen und mit einem Commutator in einen Kreis gestellt. Die Abtheilungen ausserhalb der Platte waren leer, die mittlere enthielt Flüssigkeiten von der Temperatur des Zimmers und, fest an die Platten gedrückt, befanden sich 4 Thermometer, die $\frac{1}{10}$ Grad noch deutlich anzeigten. Nennen wir die Thermometer in Zinksulfat A und B und die in Kupfersulfat C und D , so fand ich beim Durchgange des Stromes in der von den Zeichen $+$ und $-$ angedeuteten Richtung:

1) Wild, Pogg. Ann. 103. p. 411. 1858.

drahte; die Zelle enthält die Metalle a und d und die Flüssigkeiten b und c , während die Kette von dem Metalldrahte f geschlossen wird.

Nennen wir die Potentialdifferenz dieser Stoffe in der Richtung des Stromes nacheinander:

$$b|a, c|b, d|c, f|d, a|f,$$

so ist, weil die electriche Differenz zwischen anhaftender und freier Flüssigkeit zweimal, aber mit entgegengesetztem Zeichen vorkommt, die electromotorische Kraft der Säule:

$$E = b|a + c|b + d|c + f|d + a|f.$$

E ist eine Function der Temperatur, wie auch von Lindig¹⁾ bei den Daniell'schen Elementen gefunden ist.

Die in jedem Contact pro Secunde entwickelte Wärme ist nach Clausius:

$$W = -AJ(V_2 - V_1),$$

in welcher J die Stromstärke, A das thermische Aequivalent und $V_2 - V_1$ die Potentialdifferenz bedeutet.

Die in allen Contacten entwickelte Wärme ist also:

$$W = -AJ\{b|a + c|b + d|c + f|d + a|f\}$$

oder: $W = -AJE.$

Also wird in der Säule eine Wärmemenge verbraucht von:

$$AJE \text{ Wärmeeinheiten.}$$

Dies ist der erste Satz Edlund's in seiner Abhandlung über die thermischen Erscheinungen beim galvanischen Strome.²⁾

Weiter ist die galvanische Erwärmung durch Widerstand in der Gesamtkette nach dem Joule'schen Gesetze:

$$W' = +AJ^2R = +AJE \text{ Wärmeeinheiten,}$$

also: $W + W' = 0.$

1) Lindig, Pogg. Ann. 123. p. 1. 1864.

2) Edlund, Pogg. Ann. 159. p. 420. 1876.

$$\text{Pb O} - \text{H}_2\text{O} = 27675 - 34462 = - 6787$$

$$\text{Cu O} - \text{H}_2\text{O} = 21885 - 34462 = - 12577.^1)$$

Doch liefert diese Zelle: Blei- dest. Wasser-Kupfer, einen ziemlich starken Strom, welcher in der Flüssigkeit die Richtung von Blei nach Kupfer hat.

b. Zweitens nehme ich eine Kette, in welcher sich eine constante Säule und ein Zersetzungsapparat befindet. Schneiden wir z. B. den Draht f irgendwo durch und löthen daran zwei gleiche Metallplatten g , die in einer Flüssigkeit h eintauchen. Es sollen sich ferner beim Durchgange des Stromes die Gase p und q abscheiden.

Ich stelle mir nun die Flüssigkeiten im Sinne Clausius' vor, sodass sich die Theilchen zugleich in einer fortschreitenden, drehenden und schwingenden Bewegung befinden, wobei sich bald hier, bald dort ein Theil eines Molecüls mit einem andern Theile eines andern Molecüls verbinden kann. Beinahe ebenso gut kann ich mich mit der älteren Vorstellung Buys-Ballot's²⁾ vereinen, nach welcher sich die Theilchen in solchen Schwingungen befinden, dass eine äussere Kraft sie leicht über das labile Gleichgewicht hinausbringt.

Unter dem Einflusse des Stromes scheiden sich nun bald hier, bald dort die Gase p und q ab und modificiren dort die electriche Differenz zwischen den Electroden und der Flüssigkeit. Nach der Terminologie Wiedemann's verändert sich dann z. B. $\text{Pt} | \text{H}_2\text{SO}_4$ in $\text{Pt}_\text{H} | \text{H}_2\text{SO}_4$ und im allgemeinen:

1) Berthelot in seiner „Essai de méc. chim.“ gibt in Tabl. 22 u. s. w. folgende Zahlen:

Oxyde de plomb hydraté	26,7
„ „ „ anhydre	25,5
Protoxyde de cuivre . .	21
Bioxyde de cuivre . . .	19,2
Eau	34,5

2) Physiologie van het onbewerkt. ryk der natuur, Utrecht 1849. Von dieser merkwürdigen Schrift ist ein Auszug zu finden Pogg. Ann. 108. p. 140. 1858.

Nennen wir pk und pl die Polarisation in der kurzen und in der langen Röhre, so folgt aus:

$$\begin{array}{lll} \text{Versuch I} & & pl = pk, \\ \text{„ II} & & pl = 0,75 pk, \\ \text{„ III} & & pl = 0,15 pk, \end{array}$$

während Versuch IV zeigt, dass in 5 Stunden das Verhältniss $\frac{pl}{pk}$ nur von 0,4 auf 0,6 steigt. Bei sehr grossen Widerständen bleibt also die Polarisation p' für längere Zeit weit unter dem Maximum p .

Die in den Contacten entwickelte Wärme ist nach (4) und (5): in der Säule $= -AEJ$,

$$\text{im Zersetzungsapparat} + Ap i_1 = A \left(\frac{pJ}{n} - \frac{p^2(n-1)}{n^2 r} \right)$$

Die galvanisch entwickelte Wärme beträgt:

in der Säule und dem Verbindungsdraht $f = AJ^2 R$,

$$\begin{aligned} \text{im Zersetzungsapparat} &= A \left(i_1^2 nr + i_2^2 \frac{nr}{n-1} \right) \\ &= A \left\{ J^2 r + \frac{n-1}{2^2 r} p^2 \right\}. \end{aligned}$$

Zusammen erhält man also:

$$-AEJ + Ap \frac{J}{n} + AJ^2(R + r),$$

was nach (4) wieder Null liefert.

Dies Resultat stimmt wieder mit den Versuchen Favre's.

Die allein im Zersetzungsapparate entwickelte Wärme beträgt:

$$(6) \quad Ap i_1 + A \left(i_1^2 nr + i_2^2 \frac{nr}{n-1} \right) = A \left(\frac{Jp}{n} + J^2 r \right).$$

Hier ist $\frac{p}{n}$ natürlich die Polarisation p' zur Zeit der Beobachtung und $J^2 r$ die auf gewöhnliche Weise berechnete galvanische Wärme G im Zersetzungsapparate, und also gelangt man zum zweiten Satze Edlund's: dass in jedem Zersetzungsapparate ausser der galvanischen Wärme noch soviel Wärme producirt wird,

densators fast zwischen je zwei Versuchsreihen entweder ganz umgeschmolzen oder doch mit einer Bunsen'schen Flamme überfahren wurde.

III. Versuche mit Eisen und Platin.

Beobachtungsmethode und Bezeichnung wie in I und II. Beim Eisen ist besondere Vorsicht zu gebrauchen und müssen die Platten vor jedem einzelnen Versuche unbedingt neu geputzt werden.

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>
1.	$N=800$ $a=812$	$N=800$ $a=720$	$x=34$ $D=46$	$N=800$ $a=766$	$x=34$	$x=34$	$x=0,75$
2.	$N=822$ $a=834$	$N=820$ $a=741$	$x=33,5$ $D=45,5$	$N=820$ $a=787$	$x=33$	$x=33,2$	$x=0,73$
3.	$N=795$ $a=810$	$N=790$ $a=713$	$x=31$ $D=46$	$N=790$ $a=759$	$x=31$	$x=31$	$x=0,68$
4.	$N=830$ $a=844$	$N=830$ $a=746$	$x=35$ $D=49$	$N=830$ $a=795$	$x=35$	$x=35$	$x=0,71$
5.	$N=758$ $a=772$	$N=758$ $a=680$	$x=32$ $D=46$	$N=760$ $a=729$	$x=31$	$x=31,5$	$x=0,68$
6.	$N=712$ $a=727$	$N=712$ $a=627$	$x=35$ $D=50$	$N=715$ $a=680$	$x=35$	$x=35$	$x=0,70$
7.	$N=681$ $a=699$	$N=682$ $a=586$	$x=39$ $D=57$	$N=680$ $a=641$	$x=39$	$x=39$	$x=0,68$
8.	$N=698$ $a=713$	$N=699$ $a=613$	$x=35,5$ $D=50,6$	$N=700$ $a=665$	$x=35$	$x=35,2$	$x=0,70$
Mittel							$x=0,704$

Da die Verbrennungswärme des Eisens gleich ist 34100 Cal., so gibt die Berechnung für Fe|Pt den Werth = 0,701 Daniells, was mit der Beobachtung in vollkommenem Einklange steht.

Es wurde schliesslich noch das Silber der Beobachtung unterzogen, doch ist infolge der geringen Oxydationswärme desselben seine Spannung mit Platin so gering, dass schon der kleinste Beobachtungsfehler den Werth des Resultates bedeutend modificirt. Ich habe auch Silber nur deshalb beobachtet, um einen directen Vergleich mit den nachfolgenden Versuchen, betreffend Silber, in einer Chloratmosphäre anstellen zu können. Für den Werth

Diese Werthe entsprechen:

0,0965 g KBr in 24 Stunden
und 0,0617 g NH₄Br in 24 Stunden.

Versuche mit normalen KJ-, NaJ-, NaBr- und KCy-Lösungen ergaben folgende Resultate:

nKJ geb. 1,37 ccm $\frac{n}{40}$ AgNO₃ pro Stde. = 0,1364 g KJ in 24 Stdn.
nNaJ „ 1,12 „ „ „ „ = 0,1008 g NaJ in 24 Stdn.
nNaBr „ 0,85 „ „ „ „ = 0,0525 g NaBr in 24 Stdn.
nKCy „ 0,64 „ „ „ „ = 0,0499 g KCy in 24 Stdn.

Letztere Zahl darf nur als annähernd richtig betrachtet werden, da Lösungen von KCy bekanntlich ziemlich rascher Zersetzung unterworfen sind, und dies nicht ohne Einfluss auf den Gang der Diffusion sein dürfte.

Diffusion von Nitraten. Die Diffusion dieser Salze wurde genau wie bei den besprochenen ausgeführt und die diffundirte Menge des Salzes nach der Marx'schen Methode mittelst Indigolösung bestimmt.

Diffusion von $\frac{n}{4}$ BaN ₂ O ₆		Diffusion von $\frac{n}{4}$ SrN ₂ O ₆	
Zeit	diffund. Gew.	Zeit	diffund. Gew.
8—12 Vm.	0,0068 g	6—10 Vm.	0,0204 g
12— 6 Nm.	0,0110 „	10— 6 Nm.	0,0090 „
6—12 Vm.	0,0315 „	6—12 Vm.	0,0211 „
12— 6 Nm.	0,0107 „	12— 6 Nm.	0,0076 „
6—12 Vm.	0,0330 „	6—12 Vm.	0,0229 „
52 Stdn.	0,0930 „	66 Stdn.	0,0810 „

Diese Zahlen entsprechen $\left(\frac{n}{4}\right.$ Lösungen):

0,0429 g BaN₂O₆ in 24 Stunden
und 0,0294 g SrN₂O₆ in 24 Stunden.

Diffusion von nKNO ₃		Diffusion von nNH ₄ NO ₃	
Zeit	diffund. Gew.	Zeit	diffund. Gew.
9—12	0,0077 g	4— 8 Vm.	0,0360 g
12— 3	0,0071 „	8— 2	0,0144 „
3— 8 Vm.	0,0450 „	2— 5	0,0065 „
8— 4	0,0199 „	5— 9 Vm.	0,0358 „
4—10 Vm.	0,0494 „	9— 4	0,0161 „
10— 3	0,0124 „	48 Stdn.	0,1088 „
54 Stdn.	0,1415 „		

Bei KCl, KBr und KJ

	n	d	nd
KCl	0,515	803	413
KBr	0,514	811	416
KJ	0,505	823	415

Bei den Sulfaten

	$\frac{n}{2}$	d	$\frac{n}{2}d$
MgSO ₄	0,630	348	219
ZnSO ₄	0,640	332	212
CuSO ₄	0,645	316	204.

Aus diesen Tabellen scheint im allgemeinen hervorzugehen, dass

$$n:n' = d':d, \text{ d. h. } \frac{v}{v+u} : \frac{v'}{v'+u'} = d':d.$$

Aber wie oben bemerkt ist v' gleich v , mithin

$$d:d' = v+u : v+u',$$

oder in Worten ausgedrückt: die Diffusionsgeschwindigkeit eines Salzes ist proportional der Summe der Geschwindigkeiten, mit welcher seine Bestandtheile während der Electrolyse sich bewegen. Wir verstehen nunmehr den Zusammenhang meiner Resultate mit denen Kohlrausch's, da derselbe gezeigt hat, dass das Leitungsvermögen ebenfalls von den Geschwindigkeiten der Componenten abhängig ist. Von dieser Annahme ausgehend, berechnete er das Leitungsvermögen vieler Salze, und die so erhaltenen Werthe stimmen mit den durch den Versuch gefundenen sehr gut überein.

Diese Beziehung ist um so interessanter, als die Wahrscheinlichkeit derselben schon vor vielen Jahren von Wiedemann¹⁾ ausgesprochen wurde.

Es scheint demnach, dass das Gesetz der unabhängigen Beweglichkeit der Ionen ebenso gültig ist vor der Electrolyse einer Salzlösung als während derselben, da im entgegengesetzten Falle obige Analogien kaum erklärlich wären.

1) Wiedemann, Pogg. Ann. 104. p. 170. 1858. Siehe auch Maxwell, „Theorie der Wärme“, übers. v. Auerbach, p. 318.

kleine Kugel K , sodass ausserhalb dieser Flächen der Aether die nämlichen Eigenschaften besitzt, wie im luftleeren Raum. Ueber den Stoff innerhalb der Kugeln nehme ich an, dass er sich, was die Wirkung nach aussen betrifft, durch ein einziges Molecül P im Mittelpunkte ersetzen lässt. In meiner ursprünglichen Abhandlung habe ich nachgewiesen, dass wirklich bei verschiedenen anderen Annahmen die nämlichen Resultate erhalten werden. So z. B. wenn man sich die Kugeln K mit einer vollkommen leitenden Materie erfüllt denkt, oder wenn in jedem Molecül einige electrische Theilchen vorausgesetzt werden, welche sich im Aether bewegen können.

Für jedes der Theilchen P , welche wir nach dem Gesagten annehmen, mögen zwischen den Componenten X, Y, Z der auf dasselbe wirkenden electromotorischen Kraft und denjenigen m_x, m_y, m_z des inducirten electrischen Momentes die Beziehungen

$$(2) \quad m_x = \kappa X, \quad m_y = \kappa Y, \quad m_z = \kappa Z$$

bestehen, wo κ eine von der Natur der Molecüle abhängige Constante ist.

§ 3. Wenn nun in den Theilchen des Körpers electrische Bewegungen vor sich gehen, werden sich solche auch von jedem Molecül aus in den Aether ausbreiten, sodass in jedem Punkte dieses Mediums eine dielectrische Polarisation bestehen wird. Die Componenten ξ, η, ζ derselben sind mit denjenigen der electromotorischen Kraft durch die Beziehungen

$$(3) \quad \xi = \epsilon_0 X, \quad \eta = \epsilon_0 Y, \quad \zeta = \epsilon_0 Z$$

verbunden (ϵ_0 Dielectricitätsconstante des Aethers). Aus diesen Grundformeln lassen sich partielle Differentialgleichungen herleiten, in welchen ξ, η, ζ als Functionen von den Coordinaten x, y, z und der Zeit t enthalten sind. Wir wollen dieselben in der Gestalt, wie sie von Herrn Helmholtz¹⁾ abgeleitet wurden, zu Grunde legen. Nur

1) Helmholtz, Ueber die Bewegungsgleichungen der Electricität in ruhenden Leitern, Crelle's Journ. Bd. 72. Auszug in Wiedemann, Galvanismus. II. 2. Aufl. § 1256 u. fl.

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0,$$

$$\Delta \xi = \frac{1}{v_0^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad \Delta \eta = \frac{1}{v_0^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \quad \Delta \zeta = \frac{1}{v_0^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \quad 1),$$

wo v_0 die Fortpflanzungsgeschwindigkeit transversaler electrischer Schwingungen im Aether, d. h. also die Lichtgeschwindigkeit bedeutet. Die Lösung dieser Gleichungen, welche wir versuchen werden, den Bedingungen des Problems anzupassen, lautet folgendermassen:

$$(A) \quad \begin{cases} \xi = -\alpha \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left[\frac{1}{r} f_1 \left(t - \frac{r}{v_0} \right) \right], \\ \eta = \alpha \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[\frac{1}{r} f_1 \left(t - \frac{r}{v_0} \right) \right], \quad \zeta = \alpha \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left[\frac{1}{r} f_1 \left(t - \frac{r}{v_0} \right) \right]. \end{cases}$$

Hier bedeutet r die Entfernung von P , während α ein constanter Factor ist.

Für die Longitudinalbewegung hat man:

$$\xi = \frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad \eta = \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad \zeta = \frac{\partial \chi}{\partial z}, \quad \Delta \chi = \frac{1}{V_0^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2},$$

wo V_0 wieder die (von v_0 verschiedene) Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist. Wir wählen die Lösung:

$$(B) \quad \begin{cases} \xi = \beta \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{1}{r} f_1 \left(t - \frac{r}{V_0} \right) \right], \quad \eta = \beta \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[\frac{1}{r} f_1 \left(t - \frac{r}{V_0} \right) \right], \\ \zeta = \beta \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left[\frac{1}{r} f_1 \left(t - \frac{r}{V_0} \right) \right] \end{cases}$$

(β constant).²⁾

§ 5. Wir wollen nun annehmen, erstens, dass das Theilchen P ausser dem Momente (4) dergleichen Momente $m_y = f_2(t)$ und $m_z = f_3(t)$ in den Richtungen der

1) $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

2) Um (A) und (B) zu finden, habe ich folgenden Satz angewandt: Von der Gleichung $\Delta \psi = \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$ ist $\psi = \frac{1}{r} F \left(t - \frac{r}{k} \right)$ eine Lösung, und es lassen sich daraus durch Differentiation nach x, y, z beliebig viele andere Lösungen ableiten.

sind zur Abkürzung für die Functionswerthe $f_1\left(t - \frac{\varrho}{v_0}\right)$, $f_1'\left(t - \frac{\varrho}{v_0}\right)$ u. s. w. geschrieben.

Der dritte Theil endlich hat den nämlichen Werth wie die von einem gleichfalls in P in der Richtung der x -Axe gelegenen Stromelemente:

$$S = -\frac{8}{3}\pi\alpha\left(f_1' + \frac{\varrho}{v_0}f_1''\right)$$

ausgeübten Induction.

Befände sich also in P in der genannten Richtung ein Moment $-M$ (das nur electrostatische Wirkung ausübte) und ein Stromelement $-S$, dann wäre die ganze electromotorische Kraft in einem Punkte des Aethers $\frac{\xi}{\varepsilon_0}$, $\frac{\eta}{\varepsilon_0}$, $\frac{\zeta}{\varepsilon_0}$, sodass dann der Zustand (A) wirklich bestehen könnte. Anders gesagt, um diese Bewegungen zu unterhalten, sind in P das Moment $-M$ und das Stromelement $-S$ erforderlich.

§ 7. Die Ausdrücke für diese Grössen vereinfachen sich erheblich, wenn man annimmt, dass der Radius ϱ so klein ist, dass in der Zeit $\frac{\varrho}{v_0}$ sich die Functionen $f_1(t)$, $f_1'(t)$ u. s. w. nur äusserst wenig ändern. Es kann dann in einer Reihenentwicklung wie:

$$f_1\left(t - \frac{\varrho}{v_0}\right) = f_1(t) - \frac{\varrho}{v_0}f_1'(t) + \frac{\varrho^2}{2v_0^2}f_1''(t) - \text{u. s. w.}$$

jedes Glied gegen das vorhergehende vernachlässigt werden. Berücksichtigt man ausserdem die Formel (4) und die Relation $v_0^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 A^2}$ ¹⁾, so erhält man schliesslich:

$$-M = \alpha\left(\frac{8}{3}\pi + \frac{1}{\varepsilon_0}\right)m_x, \quad -S = \alpha \cdot \frac{8}{3}\pi \frac{\partial m_x}{\partial t}.$$

In gleicher Weise sind zur Unterhaltung von (B) in

1) Dieselbe geht aus der von Helmholtz für v_0 abgeleiteten Formel hervor, wenn man darin $\vartheta_0 = 0$ setzt.

punkte der Kugeln Momente und Stromelemente mit den Componenten:

$$(7) \quad \frac{4}{3} \pi \rho^3 \xi', \quad \frac{4}{3} \pi \rho^3 \eta', \quad \frac{4}{3} \pi \rho^3 \zeta',$$

$$(8) \quad \frac{4}{3} \pi \rho^3 \frac{\partial \xi'}{\partial t}, \quad \frac{4}{3} \pi \rho^3 \frac{\partial \eta'}{\partial t}, \quad \frac{4}{3} \pi \rho^3 \frac{\partial \zeta'}{\partial t}$$

setzen, denn diese üben die nämliche Wirkung aus wie der durch ξ' , η' , ζ' vorgestellte Bewegungszustand. Addirt man also (7) und (8) zu (5) und (6), so erhält man die Momente und Stromelemente, welche den § 5 vorausgesetzten Zustand im Aether zu unterhalten vermögen. Diese Grössen müssen dann aber den Momenten m_x , m_y , m_z und den Stromelementen $\frac{\partial m_x}{\partial t}$, $\frac{\partial m_y}{\partial t}$, $\frac{\partial m_z}{\partial t}$ gleich sein, welche wirklich in den Mittelpunkten der Kugeln K bestehen. Wir erhalten also für jedes Molecül die Gleichungen:

$$(\alpha) \quad (\alpha + \beta) \left(\frac{8}{3} \pi + \frac{1}{\epsilon_0} \right) m_x + \frac{4}{3} \pi \rho^3 \xi' = m_x \text{ u. s. w.}$$

$$(\beta) \quad (2\alpha - \beta) \cdot \frac{4}{3} \pi \frac{\partial m_x}{\partial t} + \frac{4}{3} \pi \rho^3 \frac{\partial \xi'}{\partial t} = \frac{\partial m_x}{\partial t} \text{ u. s. w.}$$

§ 9. Zu diesen Beziehungen treten noch diejenigen, welche aus den Bedingungen (2) hervorgehen. Bei dem im Anfange des § 8 vorausgesetzten Bewegungszustande besteht im Mittelpunkte P einer Kugel K erstens die electromotorische Kraft:

$$(9) \quad (\alpha + \beta) \cdot \frac{8}{3} \pi \frac{m_x}{\rho^3}, \quad (\alpha + \beta) \cdot \frac{8}{3} \pi \frac{m_y}{\rho^3}, \quad (\alpha + \beta) \cdot \frac{8}{3} \pi \frac{m_z}{\rho^3},$$

welche von denjenigen Bewegungen ausserhalb K herrührt, die zu dem Molecül P selbst gehören; zweitens die Kraft:

$$(10) \quad \frac{\xi'}{\epsilon_0}, \quad \frac{\eta'}{\epsilon_0}, \quad \frac{\zeta'}{\epsilon_0},$$

welche von den zu den übrigen Theilchen gehörenden Bewegungen ausgeübt wird und von den Momenten und Stromelementen (5) und (6), welche denselben beigelegt wurden. Wird nun erstens die Polarisation (ξ' , η' , ζ') in allen Kugeln mit Ausnahme der betrachteten durch die Momente und Stromelemente (7) und (8) ersetzt, so bleibt dabei die

$$1) \left\{ \begin{aligned} \xi'_{1(q)} &= \alpha \frac{\partial}{\partial x'} \left\{ \frac{\partial}{\partial x'} \left[\frac{1}{r} f_1 \left(x, y, z, t - \frac{r}{v_0} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y'} \left[\frac{1}{r} f_2 \left(x, y, z, t - \frac{r}{v_0} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial z'} \left[\frac{1}{r} f_3 \left(x, y, z, t - \frac{r}{v_0} \right) \right] \right\} - \alpha \Delta' \left[\frac{1}{r} f_1 \left(x, y, z, t - \frac{r}{v_0} \right) \right] \\ &\quad \left(\Delta' = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \right) \end{aligned} \right.$$

Um hieraus ξ'_1 zu erhalten, muss man über sämtliche Theilchen Q summiren.

§ 11. Wir wollen dabei noch die weitere Voraussetzung machen, dass sich m_x, m_y, m_z von Molecül zu Molecül nur sehr langsam ändern, was bei der Lichtbewegung der Fall sein wird, wenn die Wellenlänge gegen die Entfernung zweier Nachbarmolecüle sehr gross ist. Wir können dann um P als Mittelpunkt eine Kugel S legen, welche sehr viele Theilchen enthält, aber dennoch so klein ist, dass für sämtliche Molecüle innerhalb derselben m_x, m_y, m_z als gleich betrachtet werden dürfen. Wir erreichen dadurch erstens eine erhebliche Vereinfachung von (11) für die Theilchen Q innerhalb S , und es lässt sich zeigen, dass $\sum \xi'_{1(q)}$ über diese Theilchen ausgedehnt verschwindet, sobald die Anordnung der Molecüle isotrop oder wenigstens, wie bei den Krystallen des regulären Systems, nach drei unter einander senkrechten Richtungen die nämliche ist. Zweitens lässt sich $\sum \xi'_{1(q)}$ für die übrigen Theilchen durch ein Integral über den Raum ausserhalb S ersetzen. Ist nämlich p die Molecülzahl in der Raumeinheit, so wird

$$\xi_1 = \alpha p \frac{\partial J_1}{\partial x'} - \alpha p J_2,$$

wenn

$$J_1 = \iiint \left\{ \frac{\partial}{\partial x'} \left[\frac{1}{r} f_1 \left(x, y, z, t - \frac{r}{v_0} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y'} \left[\frac{1}{r} f_2 \left(x, y, z, t - \frac{r}{v_0} \right) \right] \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial z'} \left[\frac{1}{r} f_3 \left(x, y, z, t - \frac{r}{v_0} \right) \right] \right\} dx dy dz,$$

und

$$J_2 = \iiint \Delta' \left[\frac{1}{r} f_1 \left(x, y, z, t - \frac{r}{v_0} \right) \right] dx dy dz$$

gesetzt wird.

$$J_2 = \frac{1}{v^2} \iiint \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{1}{r} f_1 \left(x, y, z, t - \frac{r}{v_0} \right) \right] dx dy dz + 4 \pi m_x.$$

Zweitens erhält man, wenn man die durch Δ' ange-
deuteten Operationen ausführt (vergl. § 4):

$$J_2 = \frac{1}{v_0^2} \iiint \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{1}{r} f_1 \left(x, y, z, t - \frac{r}{v_0} \right) \right] dx dy dz.$$

Aus den beiden gefundenen Werthen kann man das
Integral eliminiren; führt man dabei für das Verhältniss
 $\frac{v_0}{v}$, d. h. also für den absoluten Brechungsexponenten des
betrachteten Mediums, den Buchstaben n ein, so wird

$$J_2 = - \frac{4 \pi m_x}{n^2 - 1},$$

folglich

$$\xi_1' = \alpha p \cdot \frac{4}{3} \pi m_x - \alpha p \cdot \frac{4 \pi m_x}{n^2 - 1} = \alpha p \cdot \frac{4}{3} \pi m_x \cdot \frac{n^2 + 2}{n^2 - 1}.$$

In ähnlicher Weise ergibt sich für denjenigen Theil
von ξ' , der von den Bewegungen (B) herrührt, der Werth
 $\beta \cdot \frac{4}{3} \pi p m_x$. Es wird also schliesslich

$$(12) \quad \xi' = q m_x, \quad \eta' = q m_y, \quad \zeta' = q m_z, \quad q = \frac{4}{3} \pi p \left(\alpha \cdot \frac{n^2 + 2}{n^2 - 1} + \beta \right).$$

§ 14. Durch Einführung dieser Werthe zieht sich
jedes der Systeme (α), (β), (γ) auf eine Gleichung zusam-
men, nämlich auf:

$$(13) \quad \begin{cases} (\alpha + \beta) \left(\frac{8}{3} \pi + \frac{1}{\varepsilon_0} \right) + \frac{4}{3} \pi \varrho^3 q = 1, & (2 \alpha - \beta) \cdot \frac{4}{3} \pi + \frac{4}{3} \pi \varrho^3 q = 1, \\ (\alpha + \beta) \cdot \frac{8}{3} \pi + \left(\frac{4}{3} \pi + \frac{1}{\varepsilon_0} \right) \varrho^3 q = \frac{\varrho^3}{\kappa}. \end{cases}$$

Da also zwischen α , β , q (woraus mittelst (12) n und
 v gefunden werden können) drei Gleichungen bestehen, ist
einerseits der vorausgesetzte Bewegungszustand möglich
und lassen sich andererseits alle bis jetzt unbestimmt ge-
bliebenen Grössen berechnen. Es wird nämlich:

$$\alpha = \frac{4 \pi \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\varrho^3}{\kappa} \right) + 3}{12 \pi}, \quad \beta = - \frac{\alpha}{1 + 4 \pi \varepsilon_0},$$

$$q = - \frac{\frac{8}{3} \pi \varepsilon_0^2 \left(\frac{1}{\kappa} - \frac{1}{\varrho^3} \right) + \frac{\varepsilon_0}{\kappa}}{1 + 4 \pi \varepsilon_0}.$$

bestehen muss. Dabei sind a_1, a_2 u. s. w. die in der Gewichtseinheit vorhandenen Mengen der Bestandtheile.

§ 16. Da nach (14) der Werth von k unabhängig von der Wellenlänge ist, sind zur Erklärung der Dispersion des Lichtes weitere Betrachtungen nothwendig. Ich habe zunächst untersucht, ob es (ähnlich wie in der Cauchy'schen Theorie) möglich ist, die Farbenzerstreuung daraus zu erklären, dass die Körper nicht aus einer homogenen Materie, sondern aus discreten Theilchen bestehen.

In der That wird die Voraussetzung des § 11, dass die electrischen Momente von Nachbarmoleculen als gleich betrachtet werden dürfen, um so weniger erfüllt sein, je kleiner die Wellenlänge l ist. Treibt man die Genauigkeit weiter, berücksichtigt man also auch die Verschiedenheit der Momente von nebeneinander liegenden Theilchen, so erhält man an den früher für ξ', η', ζ' gefundenen Werthen Correctionen, welche, mit diesen Werthen selbst verglichen, von der Ordnung $\left(\frac{\delta}{l}\right)^2$ sind, wenn δ die Entfernung der nächstliegenden Theilchen bedeutet. Es wird dann auch n von l abhängig.

Ich habe die eben erwähnten Correctionen für den Fall berechnet, dass die Molecüle eine regelmässig cubische Anordnung haben. Es ergab sich dabei allerdings eine Abhängigkeit des Brechungsexponenten von der Wellenlänge (in umgekehrter Richtung wie die beobachtete); nach dem zu urtheilen, was wir über die Entfernung der Molecüle wissen, scheint indess der berechnete Unterschied von n für verschiedene Wellenlängen unmerklich sein zu müssen.¹⁾

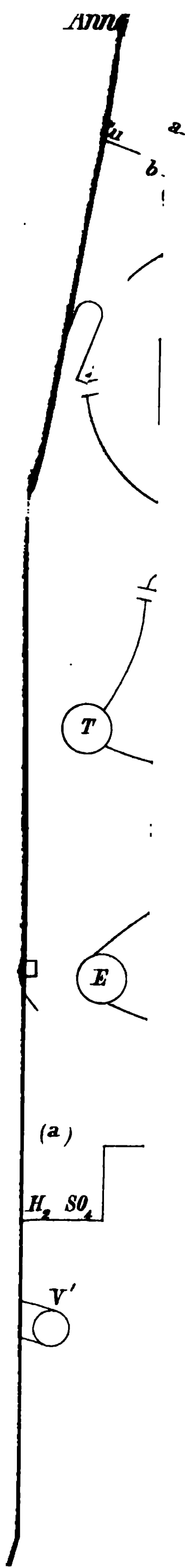
1) Setzt man z. B. in der erhaltenen Formel für δ den Werth, den Hr. van der Waals für die mittlere Entfernung der Molecüle eines Gases (bei 0° und 760 mm Druck) gefunden hat, 0,000 0025 mm, und nimmt man an, dass für unendlich lange Wellen der Brechungsexponent $n_0 = 1,5$ ist, so findet man, dass der Werth von n für ultraviolette Strahlen erst in der vierten Decimale von n_0 abweicht.

die erstere geeigneter, äussern Widerstand zu überwinden, während andererseits bei geringem äussern Widerstande der Nachtheil entsteht, dass durch den grössern innern Widerstand der entstehende Strom geschwächt wird.

Die Vergleichung der Hopkinson'schen Versuche mit den unseren kann daher freilich nicht zu der Beantwortung der Frage führen, ob die Siemens'sche oder die Gramme'sche Maschine den Vorzug verdiene, einer Frage, welche, so allgemein gestellt, gar keinen Sinn hat; aber es wird doch das, was wir über die Verschiedenheit im Verhalten beider angeführt haben, ausreichen, um das Urtheil zu entscheiden, für welche Zwecke die von der einen oder der andern Fabrik bezogenen Maschinen besser geeignet sind; und zwar gilt dies, da Hopkinson's Maschine vermuthlich ebenso wie unsere zu der kleinsten Art der von der Fabrik gelieferten gehören wird, namentlich von den in einem physikalischen Kabinet vorkommenden Anwendungen derartiger Maschinen.

Um ein vollständiges Urtheil über Vorzüge und Nachtheile beider Maschinen zu gewinnen, wäre noch nöthig, den Kraftverbrauch beider zu kennen. Wir haben jedoch denselben nicht gemessen, während die Maschine electrische Arbeit leistete, sondern nur durch einen besondern Versuch mit dem Prony'schen Zaume bestimmt, dass die Arbeit, welche unsere Dampfmaschine zu verrichten vermag, reichlich zwei Pferdekraft beträgt. Die Unsicherheit dieser Methode erlaubt uns nicht mit Sicherheit zu sagen, welche der beiden Maschinen mehr Energie verbraucht; aber wir dürfen doch aus der Vergleichung mit Hopkinson's Zahlen den Schluss ziehen, dass bei Versuchen, welche in so kleinem Massstabe ausgeführt werden, der Kraftverbrauch beider Maschinen nicht erheblich verschieden sein kann.

Schliesslich erlauben wir uns, Hrn. Prof. Herwig hier öffentlich unsern wärmsten Dank für alle seine freundlichen Mittheilungen auszusprechen.



22
99

